Effiziente Algorithmen SS 17

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1
Wir betrachten die Rekursionsgleichung $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n - 1$ mit den Startwerten $T(1) = 0$ und $T(2) = 1$. Zeigen Sie per Induktion, dass es ein $c \in \mathbb{N}$ gibt mit $T(n) \leq c \cdot n \cdot \log n$.

Aufgabe 2
Wir betrachten die Fibonacci-Folge $f_0, f_1, f_2, \ldots$ definiert durch das rekursive Bildungsgesetz $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$ und den Anfangswerten $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$. Beweisen Sie per Induktion:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Aufgabe 3
Schlagen Sie die Regel von (de) L'Hôpital nach.

Aufgabe 4
Besorgen Sie sich die Definition der Landau-Symbole $\mathcal{O}$– bzw. $\mathcal{o}$ sowie von Θ und Ω aus der Literatur.

Aufgabe 5
Ordnen Sie folgende Funktionen nach ihren Wachstumseigenschaften:

$\log n$, $\sqrt{\log n}$, $\sqrt{n}$, $(\log \sqrt{n})^2$, $\frac{n}{\log n}$, n^2 , n^k (für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$) , $n^{\log n}$, $n^{\log \log n}$, $\log(n^2)$, $(\log n)^2$, n^n , $\log \log \log n$, $\sum_{i=0}^{n} i$, $\sum_{i=0}^{n} i^2$, $2^{n \log n}$, $(\sqrt{\log n})^{\log \log n}$.

Beweisen Sie jeweils die entsprechenden $\mathcal{O}$– bzw. $\mathcal{o}$–Beziehungen.

Aufgabe 6
Geben Sie Funktionen f und g (von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$) an, so dass weder $f = \mathcal{O}(g)$ noch $g = \mathcal{O}(f)$. Beweisen Sie diese Eigenschaften.

Aufgabe 7
Zeigen Sie:

$\mathcal{O}(\log) = \mathcal{O}(\log_{10}) = \mathcal{O}(\ln) = \mathcal{O}(\log(2n)) = \mathcal{O}(\log(n + \log(n)) = \mathcal{O}(\log(n^2))$

Aufgabe 8
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. $f \in \mathcal{O}(g) \setminus \mathcal{o}(g) \implies g \in \mathcal{O}(f)$
2. Es gibt Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit: $f \notin \mathcal{O}(g)$ und $g \notin \mathcal{O}(f)$
3. $f \in \mathcal{O}(g) \setminus \mathcal{o}(g) \implies f \in \Omega(g)$

Aufgabe 9
Welche $\mathcal{O}$– bzw. o–Beziehungen gibt es zwischen den folgenden Funktionen?

$f_1(n) := n^3$

$$f_2(n) := \begin{cases} n^2 & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ n^4 & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$f_3(n) := \begin{cases} n^5 & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ n^2 \cdot \log(n) & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$f_4(n) := \begin{cases} n^n & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ 2^{n \cdot \log(n)} \cdot \log(n) & \text{, sonst} \end{cases}$$

$f_5(n) := n!$

Beweisen Sie die Eigenschaften.

Aufgabe 10
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(h) \implies f \in \mathcal{O}(h)$
2. $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in o(h) \implies f \in o(h)$
3. $f \in o(g)$ und $g \in \mathcal{O}(h) \implies f \in o(h)$
4. Die Relation $R_{\mathcal{O}}$ definiert vermöge $(f, g) \in R_{\mathcal{O}} :\Leftrightarrow f \in \mathcal{O}(g)$ ist auf der Menge der totalen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ eine Äquivalenzrelation.
5. Die Relation R_{o} definiert durch $(f, g) \in R_{o} :\Leftrightarrow f \in o(g)$ ist ist auf der Menge der totalen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ eine Ordnungsrelation.

Aufgabe 11
Sei $H(n) := \sum^{n}{}_{k=1} \frac{1}{k}$ die sogenannte n-te Harmonische Zahl.

Zeigen Sie, dass $H(n) = ln(n) + \Theta(1)$, das heißt:

$$\exists c \in N \;\; \forall n \in N \; : ln(n) - c < H(n) < ln(n) + c$$

Hinweis: Dazu kann $H(n)$ einmal als Riemann-Obersumme und einmal als Untersumme zum Integral $\int_1^n \frac{1}{x}\, dx$ gedeutet werden.