# Approximationsalgorithmen

Prof. Dr. Klaus Meer, Ameen Naif

Aufgabenblatt 3
Version 05.12.2017

---

**Aufgabe 1.**
Suchen sie Literatur über die Algorithmen von Kruskal, Edmonds und Eulertour:

(a) Was gehört zur Eingabe? Was gehört zur Ausgabe? Welche Voraussetzungen muss die Eingabe erfüllen, um den Algorithmus anwenden zu können?

(b) Welche Aussagen werden über die Laufzeit gemacht? Wie ist die Kodierungslänge der Eingabe?

**Aufgabe 2.**
Reduzieren Sie Bin Packing mit Gewichten aus $\mathbb{Q}$ auf Bin Packing mit Gewichten aus $\mathbb{N}$. Warum bleibt hier die Approximationsgüte erhalten, wenn die Lösungen auf das ursprüngliche Problem zurück übertragen werden?

**Aufgabe 3.**
Zeigen sie, dass die folgenden Entscheidungsprobleme NP-vollständig sind:

(a) Eingabe: $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$. Frage: Gibt es $S \subseteq \{1, ..., n\}$ mit $\Sigma_{i \in S} a_i = \Sigma_{i \in \overline{S}} a_i$? (Partitionsproblem)

(b) Eingabe: $B, k, a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$. Frage: Gibt es eine Partition $S_1, ..., S_k$ für $\{1, ..., n\}$ so, dass $\Sigma_{i \in S_j} a_i \leq B$ für jedes $j \in \{1, ..., k\}$ gilt? (Bin Packing Problem)

(c) Eingabe: $B, C, a_1, ..., a_n, c_1, ..., c_n \in \mathbb{N}$. Frage: Gibt es eine Teilmenge $S \subseteq \{1, ..., n\}$ mit $\Sigma_{i \in S} a_i \leq B$ und $\Sigma_{i \in S} c_i \geq C$ ? (Rucksackproblem)

**Aufgabe 4.**
Sei $0 < \gamma < 1$ eine feste Konstante und wir betrachten das Bin Packing Problem für Instanzen $I = \{S, c, B\}$ mit $c_s \leq \gamma B$ für alle $s \in S$. Zeigen Sie, dass der Next Fit Algorithmus auf solchen Instanzen ein Ergebnis $k$ garantiert mit $k \leq (1-\gamma)^{-1}\,\mathrm{OPT}(I)+1$. Was folgt daraus?

**Aufgabe 5.**
Zeigen Sie: für alle Instanzen $I$ des Bin-Packing-Problems gilt

$$FFD(I) \leq \frac{11}{9} OPT(I) + 4$$

und diese Schranke ist bestmöglich.

**Aufgabe 6.**
*(SetCover)* Sei $H(n) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ die sog. n-te Harmonische Zahl.

(a) Zeigen Sie, dass $H(n) \leq \ln n + 1$. Hinweis: $H(n)$ kann als Riemann-Obersumme bzw. Untersumme zum Integral $\int_1^n \frac{1}{x} dx$ gedeutet werden.

(b) Beweisen Sie $H(a) - H(b) \geq (b - a)/b$.