Approximationsalgorithmen

Prof. Dr. Klaus Meer, Ameen Naif

Aufgabenblatt 2
Version 14.11.2017

Aufgabe 1.
Im Beweis zum Satz TSP $\in$ APX $\Rightarrow$ P = NP musste die Behauptung "G hat einen Hamiltonkreis $\Leftrightarrow$ OPT$(\tilde{I}) = n$" bewiesen werden. Zeigen sie dies für die Richtung

$$\text{OPT}(\tilde{I}) = n \Rightarrow G \text{ hat einen Hamiltonkreis.}$$

Aufgabe 2.
Beweisen Sie: PO = NPO $\Longleftrightarrow$ P = NP.

Aufgabe 3.
Zeigen Sie: Wenn ein NPO-hartes FPTAS mit Zielfunktionswerten aus $\mathbb{N}$ existiert und in polynomialer Laufzeit in $(|I| + log_2(1/\epsilon))$ arbeitet, dann folgt PO = NPO.

Aufgabe 4.
Sei Π ein NPO polynomial begrenztes Maximierungsproblem mit Zielfunktionswerten aus $\mathbb{N}$. Zeigen Sie: Falls P $\neq$ NP, dann folgt $\Pi \notin$ FPTAS.

Aufgabe 5.
Zeigen Sie, dass das metrische Traveling-Salesman-Problem NP-hart ist.

Aufgabe 6.
Entwickeln Sie aus dem Algorithmus von Christofides einen neuen Algorithmus für das metrische TSP, in dem Sie die Berechnung eines minimalen perfekten Matchings vermeiden. Bestimmen Sie noch dazu die Approximationsgüte Ihres Algorithmus.

Aufgabe 7.
Im Algorithmus von Christofides wird eine Menge $W \subseteq V$ konstruiert. Warum enthält diese eine gerade Anzahl Knoten? Warum besitzt (W, W^2) mindestens ein perfektes Matching?

Aufgabe 8.
Im Algorithmus von Christofides wird der Multigraph G_M konstruiert. Warum ist dieser eulersch, d.h. enthält mindestens eine Eulertour?

Aufgabe 9.
Gegeben sei ein eulerscher Graph G. Entwickeln Sie einen Algorithmus, um eine Eulertour zu berechnen. Arbeitet ihr Algorithmus in polynomialer Zeit in $|G|$?

Aufgabe 10.
Formulieren Sie die beiden Graphen-Probleme "minimal aufspannender Baum" und "minimales perfektes Matching" als kombinatorische Optimierungsprobleme. Warum liegen diese in NPO? Sind sie auch in PO?