Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 9

Besprechung in KW 60 / Abgabe in KW 01

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 16, 17, 18, 19 und 20

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
L werde erzeugt von der Grammatik $G = (\{S, X, Y, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$, wobei P die folgenden Regeln hat:

$$S \to XY \;,\; Y \to CX \;,\; X \to XA \mid XB \mid AX \mid BX \mid AB \mid BB \;,\; A \to a \;,\; B \to b \mid c \;,\; C \to c$$

Prüfen Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmusses, ob die folgenden Wörter in L liegen.

$$abcabcabc \;,\; abbabaa \;,\; acacacacac \;,\; cccccccccc \;,\; bbbbcbbbb$$

Aufgabe 4
Konstruieren Sie Turing-Maschinen, die die folgenden Bandinhalte in der angegebenen Weise verändern. Die Turing-Maschinen starten auf dem ersten Non-Blank-Zeichen, und sollen beim Stoppen wiederum auf diesem Feld stehen (Eingabealphabet ist $\{0, 1, a\}$, $n, m \in \mathbb{N}$).

1. $a^n 1 a^m$ nach $a^{n \dot{-} m}$, wobei $n \dot{-} m := \begin{cases} n - m & \text{falls } n \geq m, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
2. $a^n 1 a^m$ nach $a^{n \cdot m}$.
3. $a^n 1 a^m$ nach $a^{n//m}$, wobei $n//m$ die ganzahlige Division von n durch m bezeichnet.
4. $a^n 1 a^m$ nach $a^{n \bmod m}$.
5. a^n nach $\mathrm{bin}\,(n)$, wobei $\mathrm{bin}\,(n)$ die Binärdarstellung von n ist (niederwertige Bits hinten).
6. $\mathrm{bin}\,(n)$ nach a^n.
7. $\mathrm{bin}\,(n) \square \mathrm{bin}\,(m)$ nach $\mathrm{bin}\,(n + m)$.
8. $\mathrm{bin}\,(n) \square \mathrm{bin}\,(m)$ nach $\mathrm{bin}\,(n \cdot m)$.
9. $\mathrm{bin}\,(n)$ nach $\mathrm{bin}\,(n^2)$ überführt.

Kommentieren Sie Ihre Programme!

Aufgabe 5
Geben Sie für folgende Sprachen jeweils entscheidende Turing-Maschinen an:

$$L_1 = \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$
$$L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \ abbb \text{ ist nicht Teilwort von } w\}$$
$$L_3 = \{wcw \mid w \in \{a,b\}^*\}$$
$$L_4 = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Kommentieren Sie Ihre Programme!

Aufgabe 6
Geben Sie eine entscheidende Turing-Maschine für $L(\alpha)$ an, wobei α der folgende reguläre Ausdruck ist.

$$\alpha = ((aba \cup bbb)^* \cdot (aaa \cup bbb)^* \cdot (ccc)^*)$$

Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise und Ihr Programm!

Aufgabe 7
Geben Sie eine Turing-Maschine M an, die $\mathrm{bin}(n)$ nach $\mathrm{hex}(n)$ überführt, wobei $\mathrm{hex}(n)$ die Hexadezimaldarstellung von n ist (niederwertige Stellen hinten). Geben Sie einen Lauf von M auf dem Wort 11110100101 an. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise und Ihr Programm!

Aufgabe 8
Geben Sie Turing-Maschinen an, die aus einem Bandinhalt der Form $w_1 \Box w_2 \Box \cdots \Box w_k$ (beliebige Anzahl nichtleerer Worte, jeweils durch ein Blank ($\Box$) getrennt) die folgenden Bandinhalte erzeugen ($w_1, w_2, \ldots, w_k \in \{0,1\}^+$):

1. $w_1 \Box w_2 \Box \cdots \Box w_k \Box w_1$.
2. $w_1 \Box w_2 \Box \cdots \Box w_{k-1} \Box w_k \Box w_1 \Box w_2 \Box \cdots \Box w_{k-1} \Box w_k$.
3. $w_1 \Box w_3 \Box w_5 \Box \cdots \Box w_n$ mit $n = \begin{cases} k-1 & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ k & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$
4. $w_1 \Box w_2 \Box w_1 \Box w_3 \Box w_1 \Box w_4 \Box \cdots \Box w_{k-1} \Box w_1 \Box w_k$.

Kommentieren Sie Ihre Programme!

Aufgabe 9
Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

1. L ist entscheidbar.
2. L und $\overline{L}$ sind semi-entscheidbar.
3. Es gibt eine Turingmaschine, die akzeptierend stoppt falls $x \in L$, und verwerfend stoppt, falls $x \notin L$.
4. $L = \mathrm{Bild}(f)$ für eine totale berechenbare streng-monoton steigende Funktion $f : \{1\}^* \to \Sigma^*$ oder L ist endlich.
5. Die charakteristische χ_L Funktion von L ist berechenbar.

Aufgabe 10
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Die Menge der abzählbaren Sprachen über Σ ist überabzählbar.
2. Die Menge der aufzählbaren Sprachen über Σ ist abzählbar.
3. Es gibt nicht-aufzählbare Sprachen über Σ.

Aufgabe 11
Seien $L, L' \subseteq \{a,b\}^*$. Zeigen Sie:

1. Sind L und L' aufzählbar, so ist auch $L \cup L'$ aufzählbar.
2. Sind L und L' semi-entscheidbar, so ist auch $L \cap L'$ aufzählbar.
3. Sind L und L' aufzählbar, so ist auch $L \cdot L'$ aufzählbar.
4. Ist L aufzählbar, so ist auch L^* aufzählbar.
5. Ist L entscheidbar, so ist L aufzählbar.

Aufgabe 12
Geben Sie eine Turing-Maschine an, die aus einem Bandinhalt der Form $w_1\square w_2\square\cdots\square w_k$ (beliebige Anzahl nichtleerer Worte, jeweils durch ein Blank ($\square$) getrennt. $w_1, w_2, \ldots, w_k \in \{0,1\}^+$) den Bandinhalt $w_1\square w_2\square\cdots\square w_{k-1}\square w_k\square w_k\square w_{k-1}\square\cdots\square w_2\square w_1$ erzeugt.

Aufgabe 13
Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

1. Jede Teilmenge einer aufzählbaren Sprache ist abzählbar.
2. Jede Teilmenge einer abzählbaren Sprache ist aufzählbar.
3. Jede Teilmenge einer abzählbaren Sprache ist abzählbar.
4. Jede Teilmenge einer entscheidbaren Sprache ist abzählbar.
5. Jede Obermenge einer nichtaufzählbaren Sprache ist nichtaufzählbar.
6. Jede Obermenge einer nichtentscheidbaren Sprache ist nichtentscheidbar.
7. Jede Teilmenge einer nichtentscheidbaren Sprache ist nichtentscheidbar.

Aufgabe 14
Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

1. L ist rekursiv aufzählbar.
2. L ist semi-entscheidbar.
3. $L = \mathrm{Bild}(f)$ für eine totale injektive berechenbare Funktion $f : \{1\}^* \to \Sigma^*$ oder L ist endlich.
4. $L = \mathrm{Bild}(f)$ für eine totale berechenbare Funktion $f : \{1\}^* \to \Sigma^*$ oder $L = \emptyset$.
5. $L = \mathrm{Bild}(f)$ für eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$.
6. $L = \mathrm{Def}(f)$ für eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$.
7. Die semi-charakteristische φ_L Funktion von L ist berechenbar.

Aufgabe 15
Geben Sie berechenbare Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 aus Σ^* nach Σ^* an, die folgende Eigenschaften haben:

1. $\mathrm{Def}(f_1)$ nicht-entscheidbar und $\mathrm{Bild}(f_1)$ entscheidbar.
2. $\mathrm{Def}(f_2)$ nicht-entscheidbar und $\mathrm{Bild}(f_2)$ nicht-entscheidbar.
3. $\mathrm{Def}(f_3)$ entscheidbar und $\mathrm{Bild}(f_3)$ nicht-entscheidbar.
4. $\mathrm{Def}(f_4)$ entscheidbar und $\mathrm{Bild}(f_4)$ entscheidbar

Aufgabe 16
Konstruieren Sie Turing-Maschinen, die die folgenden Bandinhalte in der angegebenen Weise verändern. Die Turing-Maschinen starten auf dem ersten Non-Blank-Zeichen, und sollen beim Stoppen wiederum auf diesem Feld stehen (Eingabealphabet ist $\{0, 1, a\}$, $n, m \in \mathbb{N}$). Kommentieren Sie Ihre Programme!

1. $a^n 1 a^m$ nach $a^{n \cdot m}$.
2. $\text{bin}\,(n) \Box \text{bin}\,(m)$ nach $\text{bin}\,(n+m)$.

Aufgabe 17
Geben Sie eine entscheidende Turing-Maschinen (mit Kommentierung) für die folgende Sprache sn:

$$L := \{wcwca^n \mid w \in \{a,b\}^* \wedge n \in \mathbb{N} \wedge 3 \cdot |w| = n\}$$

Aufgabe 18
Beschreiben Sie verbal eine Turing-Maschinen, die folgende Funktion f berechnet:

$$f : \{a,b\}^* \to \{a,b\}^* \text{ mit } f(w) = \begin{cases} (bba)^{3 \cdot \#_b(w)} & \text{, falls} \quad \#_a(w) \text{ nicht durch 4 teilbar,} \\ \text{undefiniert} & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 19
Sei f eine Funktion aus Σ^* nach Σ^*. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. f berechenbar $\Longrightarrow$ Bild(f) aufzählbar.
2. f berechenbar $\Longrightarrow$ Def(f) aufzählbar.
3. f berechenbar und total $\Longrightarrow$ Bild(f) entscheidbar.
4. f berechenbar und total $\Longrightarrow$ Def(f) entscheidbar.

Aufgabe 20
Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

1. Jede Teilmenge einer aufzählbaren Sprache ist aufzählbar.
2. Jede Teilmenge einer entscheidbaren Sprache ist aufzählbar.
3. Jede aufzählbare Sprache hat eine entscheidbare Teilmenge.
4. Jede Teilmenge einer nichtaufzählbaren Sprache ist nichtaufzählbar.

E schéine Krëschtdag an e glécklecht neit Joer!
Vrolijk Kerstmis en een een Gelukkig Nieuwjaar!
God Jul och Gott Nytt År!
Joyeux Noël et une Bonne Nouvelle Année!
Frohe Weihnachten und einen Guten Rutsch ins Neue Jahr!
