

Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 8

Besprechung in KW 49 / Abgabe in KW 50

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von:

- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 17, 18, 19 und 20

Aufgabe 1

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

Sei $L := \{w_1\#w_2\#w_3\cdots\#w_k\# \mid k \in \mathbb{N} \text{ gerade}, w_i \in \{a, b\}^+, \forall i \in \{1, \dots, k-1\} : w_i = \overline{w_{i+1}}\}$
 $= \{(w\#\overline{w}\#)^n \mid n \in \mathbb{N}, w \in \{a, b\}^+\}.$

Zeigen Sie:

1. L ist nicht kontextfrei,
2. L ist Schnitt zweier kontextfreier Sprachen L_1 und L_2 ,
3. Das Komplement von L ist eine kontextfreie Sprache.

Hinweis: Geben Sie einen erkennenden NPDA an

Aufgabe 4

.Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$\text{REG} \subset \text{CFL} \subset \text{CSL}$$

Denken Sie daran, Zeugensprachen für die Echtheit der Inklusion anzugeben!

Aufgabe 5

Sei Σ ein Alphabet, L eine kontextfreie Sprache über Σ , R eine reguläre Sprache über Σ und h ein Homomorphismus von Σ^* nach Σ^* . Zeigen Sie:

1. $L \cap R$ ist kontextfrei,
2. $h(L)$ ist kontextfrei,
3. $h^{-1}(L)$ ist kontextfrei

Aufgabe 6

Sei: $L_1 := \{a, d\}^* \cdot \{b, d\}^* \cdot \{c, d\}^*$
 $L_2 := \{w \in L_1 \mid \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$
 $L_3 := \{xyz \in L_1 \mid x, z \in \{a, b, c, d\}^* \wedge y \in \{ab, bc\}\}$
 $L_4 := L_2 \cup L_3$

Welche der Sprachen L_1, \dots, L_4 besitzen die kontextfreie Pumping-Eigenschaft? Welche der Sprachen L_1, \dots, L_4 sind kontextfrei?

Hinweis: Welche Rolle spielen die Zeichen d in den Sprachen L_1, \dots, L_4 ?

Aufgabe 7

Sei $L := \{w_1\#w_2\#w_3\cdots\#w_k\# \mid k \in \mathbb{N} \text{ gerade}, w_1 \in \{a, b\}^+, \forall i \in \{1, \dots, k-1\} : w_i = \overleftarrow{w_{i+1}}\}$
 $= \{(w\#\overleftarrow{w}\#)^n \mid n \in \mathbb{N}, w \in \{a, b\}^+\}.$

Zeigen Sie:

1. L ist nicht kontextfrei,
2. L ist Schnitt zweier kontextfreier Sprachen L_1 und L_2 ,
3. Das Komplement von L ist eine kontextfreie Sprache.

Hinweis: Geben Sie einen erkennenden NPDA an

Aufgabe 8

.Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$\text{REG} \subset \text{CFL} \subset \text{CSL}$$

Denken Sie daran, Zeugensprachen für die Echtheit der Inklusion anzugeben!

Aufgabe 9

Sei Σ ein Alphabet, L eine kontextfreie Sprache über Σ , R eine reguläre Sprache über Σ und h ein Homomorphismus von Σ^* nach Σ^* . Zeigen Sie:

1. $L \cap R$ ist kontextfrei,
2. $h(L)$ ist kontextfrei,
3. $h^{-1}(L)$ ist kontextfrei

Aufgabe 10

Sei: $L_1 := \{a, d\}^* \cdot \{b, d\}^* \cdot \{c, d\}^*$
 $L_2 := \{w \in L_1 \mid \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$
 $L_3 := \{xyz \in L_1 \mid x, z \in \{a, b, c, d\}^* \wedge y \in \{ab, bc\}\}$
 $L_4 := L_2 \cup L_3$

Welche der Sprachen L_1, \dots, L_4 besitzen die kontextfreie Pumping-Eigenschaft? Welche der Sprachen L_1, \dots, L_4 sind kontextfrei?

Hinweis: Welche Rolle spielen die Zeichen d in den Sprachen L_1, \dots, L_4 ?

Aufgabe 11

Wir betrachten die *Dyck-Sprachen* $D_1 := L(G_1)$ und $D_2 := L(G_2)$, wo

$$G_1 = (\{S\}, \{(,)\}, \{S \rightarrow SS, S \rightarrow \lambda, S \rightarrow (S)\}, S)$$

$$G_2 = (\{S\}, \{(,), [,]\}, \{S \rightarrow SS, S \rightarrow \lambda, S \rightarrow (S), S \rightarrow [S]\}, S)$$

1. Beschreiben Sie D_1 und D_2 umgangssprachlich.
 Siehe auch: http://en.wikipedia.org/wiki/Dyck_language (englische Version!).
2. Geben Sie erkennende Kellerautomaten für D_1 und D_2 an.
3. Geben Sie Homomorphismen g, h und eine reguläre Sprache R an, so dass $D_1 = h^{-1}(D_2 \cap R)$.
4. Geben Sie Homomorphismen g und h sowie eine reguläre Sprache R an, so dass $\{wc\overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\} = h^{-1}(D_2 \cap R)$ ist.

Aufgabe 12

Zu $L \subseteq \Sigma^*$ definieren wir $\text{ANF}(L) := \{w \mid \exists v \in \Sigma^* \text{ mit } wv \in L\},$
 $\text{END}(L) := \{w \mid \exists v \in \Sigma^* \text{ mit } vw \in L\},$
 $\text{SUB}(L) := \{w \mid \exists v, u \in \Sigma^* \text{ mit } vwu \in L\}.$

1. Geben Sie $\text{ANF}(L)$, $\text{END}(L)$ und $\text{SUB}(L)$ für folgende Sprachen L_i an ($i = 1, 2, 3$):

$$L_1 := \{ab, aababb, \lambda\}, \quad L_2 := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad L_3 := \{w\overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}.$$

2. Sei $M = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \{a, b, c\}, \delta, \{1\}, \{5, 6\})$ ein nichtdeterministischer finiter Automaten, mit δ gegeben durch:

δ	1	2	3	4	5	6	7	8
a	{2}	{5}	\emptyset	\emptyset	{2}	\emptyset	\emptyset	\emptyset
b	\emptyset	\emptyset	{4}	{5}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
c	\emptyset	{6}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	{7}	{7, 8}	{8}

Geben Sie nichtdeterministische Automaten an, die $\text{ANF}(L(M))$, $\text{END}(L(M))$ und $\text{SUB}(L(M))$ erkennen.

3. Zeigen Sie: Wird L von einem finiten Automat erkannt, so auch $\text{ANF}(L)$, $\text{END}(L)$ und $\text{SUB}(L)$.
4. Zeigen Sie: Wird L von einer kontextfreien Grammatik erzeugt, so auch $\text{ANF}(L)$, $\text{END}(L)$ und $\text{SUB}(L)$.

Aufgabe 13

Sei $L := \{a^n b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0 \wedge n \neq m\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

1. L hat nicht die reguläre Pumping-Eigenschaft.
2. L hat die kontextfreie Pumping-Eigenschaft.

Hinweis: L ist nicht kontextfrei. Dies kann mit Hilfe von Ogden's Lemma nachgewiesen werden, gute Studierende können den Beweis versuchen. Die Anwendung von Ogden's Lemma ist nicht wesentlich schwieriger als die Anwendung des Pumping Lemmas. (Zu Ogden's Lemma siehe http://en.wikipedia.org/wiki/Ogden%27s_lemma, bzw. William Ogden: A Helpful Result for Proving Inherent Ambiguity, Mathematical Systems Theory, 2(3), pp. 191-194, 1968.

Aufgabe 14

Sei L eine Sprache über Σ und L habe die Pumpingeigenschaft mit der Pumpingkonstanten k . Zeigen Sie:

1. $L \neq \emptyset \iff L \cap \Sigma^{\leq k} \neq \emptyset$
2. $|L| = \infty \iff L \cap (\Sigma^{\leq 2k} \setminus \Sigma^{\leq k}) \neq \emptyset$

Aufgabe 15

Geben Sie Verfahren an, die bei Eingabe eines endlichen Automaten M entscheiden, ob $L(M) = \emptyset$, $|L(M)| < \infty$, $|L(M)| = \infty$, $\overline{L(M)} = \emptyset$.

Aufgabe 16

Geben Sie Verfahren an, die bei Eingabe eines Kellerautomaten P entscheiden, ob $L(P) = \emptyset$, $|L(P)| < \infty$, $|L(P)| = \infty$.

Aufgabe 17

Geben Sie ein Verfahren an, das bei Eingabe von zwei endlichen Automaten M und M' entscheidet, ob $L(M) = L(M')$.

Aufgabe 18

Zeigen Sie, da's L_1^* und $\{a\} \cdot L_2^*$ kontextfrei sind, wobei $L_1 := \{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $L_2 := \{b^n a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 19

Sei $L_1/L_2 := \{v \mid \exists u \in L_2 \text{ mit } vu \in L_1\}$ (Rechtsquotient)
und $L_2 \setminus L_1 := \{v \mid \exists u \in L_2 \text{ mit } uv \in L_1\}$ (Linksquotient).

Zeigen Sie:

1. Die regulären Sprachen sind abgeschlossen unter Rechtsquotienten- und Linksquotientenbildung.
2. Die kontextfreien Sprachen sind nicht abgeschlossen unter Rechtsquotienten- und Linksquotientenbildung (Hinweis: vergleiche vorhergehende Aufgabe).
3. Die kontextfreien Sprachen sind abgeschlossen unter Rechtsquotienten- und Linksquotientenbildung mit regulären Sprachen.
(d. h. $L_1 \in \text{REG} \wedge L_2 \in \text{CFL} \Rightarrow L_2/L_1, L_1 \setminus L_2 \in \text{CFL}$).

Aufgabe 20

Eine Grammatik ist in binärer Greibach-Normalform, wenn sie in Greibach Normalform ist und keine Regel besitzt welche auf der rechten Seite 3 oder mehr Nonterminals hat.

Zeigen Sie: Zu jeder kontextfreien Sprache gibt es eine Grammatik in binärer Greibach-Normalform.

Hinweis: Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik in Greibach-Normalform und k die maximale Anzahl von Nonterminals in einer rechten Seite einer Regel aus R . Betrachte eine neue Variablenmenge $V' := \{[W] \mid W \in V^{\leq k}\}$.

Aufgabe 21

Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeichnen Sie das Venn-Diagramm mit folgenden Sprachmengen:

$P(\Sigma^*)$	alle Sprachen über Σ
REG	reguläre Sprachen über Σ
CFL	kontextfreie Sprachen über Σ
\mathcal{A}_3	Sprachen über Σ mit regulärer Pumping Eigenschaft
\mathcal{A}_2	Sprachen über Σ mit kontextfreier Pumping Eigenschaft

Tragen Sie überall eine Sprache ein, die im jeweiligen Bereich liegt, begründen Sie Ihre Eintragungen.

Bemerkung: Sie dürfen alle Sprachen aus dem Übungsblatt verwenden.

Aufgabe 22

Sei $L := \{w \in \{a, b\}^* \mid bb \text{ ist Teilwort von } w, \text{ oder } \#_a(w) \text{ ist Primzahl, oder } \#_b(w) = 0\}$. Zeigen Sie, dass L die kontextfreie Pumping-eigenschaft hat, aber nicht kontextfrei ist.

Aufgabe 23

Sei Σ ein endliches Alphabet. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen..

1. Jede Sprache, die die kontextfreie Pumping-Eigenschaft hat ist kontextfrei.
2. Ist $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei und h ein Worthomomorphismus von Σ^* nach Σ^* , so sind $h(L)$ und $h^{-1}(L)$ auch kontextfrei.
3. $\exists L \in \text{CFL} : \bar{L} \in \text{CFL}$
4. $\forall L \in \text{CFL} : \bar{L} \notin \text{CFL}$
5. Es gibt eine kontextfreie Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenz R_L einen unendlichen Index hat.
6. Es gibt eine kontextfreie Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenz R_L einen endlichen Index hat.
7. Es gibt eine kontextfreie, nicht-reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenz R_L einen endlichen Index hat.
8. Ist $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei und $L' \subseteq \Sigma^*$ nicht-regulär, so ist auch $L \cup L'$ nicht-regulär.
9. Sind $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei und $L' \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei, so ist auch $L \cup L'$ kontextfrei.

Aufgabe 24

Sei $L_1 := \{a^n b^m c^k \mid n, m, k \in \mathbb{N}_0 \wedge (n = m)\}$, $L_2 := \{a^n b^m c^k \mid n, m, k \in \mathbb{N}_0 \wedge (m = k)\}$ und $L_3 := \{a^n b^m c^k \mid n, m, k \in \mathbb{N}_0 \wedge (n \neq m \vee m \neq k)\}$. Zeigen Sie:

1. L_1, L_2, L_3 und $L_1 \cup L_2$ sind kontextfrei.
2. $L_1 \cap L_2$ ist nicht kontextfrei (Hinweis: Zeigen Sie, dass $L_1 \cap L_2$ nicht kontextfrei pumpbar ist.)
3. $\overline{L_1 \cap L_2} = (\{a, b, c\}^* \setminus L(a^* b^* c^*)) \cup L_3$.
4. $\overline{L_1 \cap L_2}$ ist kontextfrei.
5. Die kontextfreien Sprachen sind nicht abgeschlossen unter Schnitt und Komplementbildung.