

Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 7

Besprechung in KW 48 / Abgabe in KW 49

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von:

- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 18, 19, 20 und 21

Aufgabe 1

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Die Klasse CFL der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen unter Vereinigung, Konkatenation, Iteration, Homomorphismus, inversem Homomorphismus und Schnitt mit regulären Mengen.
Hinweis: Benutzen Sie bei „Schnitt mit regulären Mengen“ die Produktautomatenkonstruktion für einen erkennenden Keller-Automaten und einen endlichen Automaten, bei „Homomorphismus“ erzeugende kontextfreie Grammatiken und bei „inversem Homomorphismus“ erkennende Keller-Automaten.
2. Die Klasse CFL der kontextfreien Sprachen ist nicht abgeschlossen unter Komplementbildung und Schnitt.

Aufgabe 4

Sei $L := \{w \in \{a, b\}^* \mid abab \text{ ist nicht Teilwort von } w\}$.

1. Geben Sie einen deterministischen finiten Automaten M für L an.
2. Konstruieren Sie zu M eine rechtslineare Grammatik G , die L erzeugt.
3. Konstruieren Sie zu M eine linkslineare Grammatik G' , die L erzeugt.
4. Geben Sie für das Wort $abaabbabbabb$ einen Ableitungsbaum bzgl. G und einen Ableitungsbaum bzgl. G' an.

Aufgabe 5

Konstruieren Sie zur kontextfreien Grammatik $G := (\{X\}, \{a, b\}, P, X)$ Pushdown-Automaten nach dem in der Vorlesung beschriebenen Verfahren, mit $P : X \rightarrow XX \mid aXb \mid bXa \mid ab \mid ba$.

Sei $w := baabba$. Geben Sie alle Ableitungsbäume für w bezüglich der Grammatik G an. Geben Sie für den konstruierten Pushdown-Automaten jeweils Läufe auf dem Wort w an, die den verschiedenen Ableitungsbäumen entsprechen. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 6

Sei $G = (\{S, A, B, C, D, E, F\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit:

$$P = \{S \rightarrow aA \mid bB \mid aS \mid bS, A \rightarrow aA \mid bA \mid cC, B \rightarrow aB \mid bB \mid cD, \\ C \rightarrow cC \mid aF, D \rightarrow cD \mid bF, E \rightarrow aE \mid bE \mid \varepsilon, F \rightarrow E\}$$

1. Konstruieren Sie einen finiten Automaten M zur Sprache $L(G)$.
2. Geben Sie für alle Klassen der Relation $R_{L(G)}$ jeweils einen die Klasse beschreibenden regulären Ausdruck an.
3. Geben Sie einen regulären Ausdruck α an, der $L(G)$ beschreibt.
4. Konstruieren Sie eine linkslineare Grammatik G' mit $L(G) = L(G')$.

Aufgabe 7

Zu einer kontextfreien Grammatik $G = (N, T, P, S)$ definieren wir:

$$\begin{aligned} N_{\text{erz}} &:= \{X \in N \mid \exists w \in T^* (X \xrightarrow{*} w)\} && \text{erzeugende Nonterminals} \\ N_{\text{err}} &:= \{X \in N \mid \exists \alpha, \beta \in (T \cup N)^* (S \xrightarrow{*} \alpha X \beta)\} && \text{erreichbare Nonterminals} \\ N_{\text{ntz}} &:= \{X \in N \mid \exists \alpha, \beta \in (T \cup N)^* \exists w \in T^* (S \xrightarrow{*} \alpha X \beta \xrightarrow{*} w)\} && \text{nützliche Nonterminals} \end{aligned}$$

Geben Sie ein Verfahren an, das zu einer Grammatik $G = (N, T, P, S)$ die Mengen N_{erz} , N_{err} und N_{ntz} bestimmt.

1. Gilt im Allgemeinen $N_{\text{ntz}} = N_{\text{erz}} \cap N_{\text{err}}$?
2. Geben Sie ein Verfahren an, das entscheidet, ob $L(G) = \emptyset$ ist.
3. Gibt es zu jeder kontextfreien Grammatik G eine äquivalente Grammatik G' , die nur nützliche Nonterminals besitzt?
4. Geben Sie ein Verfahren an das zu einer Grammatik G mit $L(G) \neq \emptyset$ eine äquivalente Grammatik G' erzeugt, die nur nützliche Nonterminals besitzt.
5. Wenden Sie Ihr Verfahren auf die Grammatik $G := (\{A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, P, A)$ an, wo $P := \{A \rightarrow AC, A \rightarrow B, B \rightarrow bb, C \rightarrow CD, C \rightarrow a, C \rightarrow Ca, E \rightarrow aE, E \rightarrow aa\}$

Aufgabe 8

Konstruieren Sie zu folgenden kontextfreien Grammatiken G_1 und G_2 äquivalente Grammatiken, welche keine λ -Regeln (also keine Regeln der Form $A \rightarrow \lambda$ mit A Nonterminal) besitzen. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise.

1. $G_1 := (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, \{C \rightarrow \lambda, A \rightarrow aD, B \rightarrow bb, C \rightarrow bCb, D \rightarrow CB, D \rightarrow aa\}, A)$,
2. $G_2 := (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, P, A)$ mit $P = \{A \rightarrow aD, B \rightarrow C, B \rightarrow b, C \rightarrow bCb, C \rightarrow \lambda, D \rightarrow BCB, D \rightarrow aa\}$.

Aufgabe 9

Konstruieren Sie zu folgenden kontextfreien Grammatiken G_1 und G_2 äquivalente Grammatiken, welche keine λ -Regeln (also keine Regeln der Form $A \rightarrow \lambda$ mit A Nonterminal) und keine längenerhaltenden Regeln (also keine Regeln der Form $A \rightarrow B$ mit A, B Nonterminals) besitzen. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise.

1. $G_1 := (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, \{D \rightarrow \lambda, A \rightarrow aDD, B \rightarrow bb, C \rightarrow bCb, C \rightarrow a, D \rightarrow C, D \rightarrow B, D \rightarrow aa\}, A)$
2. $G_2 := (\{A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, \{A \rightarrow aD, B \rightarrow C, B \rightarrow b, C \rightarrow bCb, C \rightarrow B, C \rightarrow a, D \rightarrow BCB, D \rightarrow E, E \rightarrow A\}, A)$

Aufgabe 10

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik ohne λ -Regeln. Wir betrachten die folgenden Verfahren:

- (A) Solange es Regeln $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow \alpha$ gibt mit $A, B \in N$ und $\alpha \in (N \cup T)^+ \setminus N$, so dass $A \rightarrow \alpha$ noch nicht in der Regelmenge ist, füge die Regel $A \rightarrow \alpha$ zur Regelmenge hinzu.
- (B) Solange es Regeln $A \rightarrow \alpha B \beta$ und $B \rightarrow C$ gibt mit $A, B, C \in N$ und $\alpha \in (N \cup T)^*$, so dass $A \rightarrow \alpha C \beta$ noch nicht in der Regelmenge ist, füge die Regel $A \rightarrow \alpha C \beta$ zur Regelmenge hinzu.
- (C) Streiche alle Regeln $A \rightarrow B$ mit $A, B \in N$.

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Das Verfahren (A) terminiert.
2. Das Verfahren (B) terminiert.
3. Durch Anwenden von (A) und danach (C) auf die Grammatik G erhält man eine zu G äquivalente Grammatik ohne Regeln der Form $A \rightarrow B$ mit $A, B \in N$.
4. Durch Anwenden von (B) und danach (C) auf die Grammatik G erhält man eine zu G äquivalente Grammatik ohne Regeln der Form $A \rightarrow B$ mit $A, B \in N$.

Hinweis: Betrachten Sie unter anderem die Grammatik $G = (\{A, B, C, D, E, S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow A, A \rightarrow B, B \rightarrow CD, C \rightarrow E, D \rightarrow F, E \rightarrow a, F \rightarrow b\}, S)$.

Aufgabe 11

Konstruieren Sie zur der Grammatik $G_1 = (\{S, A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, B_3, C, C_1, C_2, C_3\}, \{a, b, c\}, P, S)$ eine äquivalente Grammatik in Chomsky-Normalform. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise.

$$P := \{S \rightarrow aA \mid bB \mid cC, \quad A \rightarrow A_1c \mid A_2A_1 \mid a, \quad A_1 \rightarrow A_2 \mid aa, \quad A_2 \rightarrow \lambda \mid bb, \\ B \rightarrow B_3, \quad B_1 \rightarrow B_2 \mid a, \quad B_2 \rightarrow B_3 \mid b, \quad B_3 \rightarrow B_1 \mid c, \\ C \rightarrow C_1C_2C_3, \quad C_1 \rightarrow C_1C_1C_1 \mid a, \quad C_2 \rightarrow cC_2cC_2 \mid b, \quad C_3 \rightarrow ccc \}$$

Aufgabe 12

Wir definieren die Wortfolge $(w_i \mid i \in \mathbb{N})$ induktiv vermöge $w_0 := \lambda$ und $w_{i+1} := w_i \cdot b \cdot a^i$ für $i \in \mathbb{N}$. Weiter sei $L := \{w_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$. Beweisen Sie:

1. $\{|w| \mid w \in L\} = \{\frac{n(n+1)}{2} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.
2. $\forall w \in L \quad \forall p \in \mathbb{N}_0 \quad \exists n \in \mathbb{N}_0 : (n > |w| \wedge L \cap \{v \in \{a, b\}^* \mid n \leq |v| \leq n + p\} = \emptyset)$.
3. L hat die kontextfreie Pumping-Eigenschaft nicht.

Aufgabe 13

Beweisen Sie, dass die folgenden Sprachen L_i die kontextfreie Pumping-Eigenschaft nicht haben:

$$L_1 = \{a^n b^{2n} c^{3n} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \\ L_2 = \{a^n b^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \\ L_3 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\} \\ L_4 = \{a^m \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 : n = m^2\} \\ L_5 = \{a^p \mid p \text{ Primzahl}\}$$

Aufgabe 14

Angenommen, wir nehmen folgende Änderungen in der Definition der kontextfreien Pumping-Eigenschaft vor:

1. “ $(\forall z \in L \text{ mit } |z| \geq k)$ ” durch “ $(\forall z \in L)$ ” ersetzen.
2. “ $(\forall z \in L \text{ mit } |z| \geq k)$ ” durch “ $(\forall z \in \Sigma^* \text{ mit } |z| \geq k)$ ” ersetzen.
3. Die Bedingung “ $vx \neq \lambda$ ” weglassen.
4. “ $(\forall i \in \mathbb{N}_0)$ ” durch “ $(\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ ” ersetzen.
5. “ $vx \neq \lambda$ ” durch “ $v \neq \lambda \wedge x \neq \lambda$ ” ersetzen
6. “ $(\forall i \in \mathbb{N}_0) : uv^iwx^iy$ ” durch “ $(\forall i, j \in \mathbb{N}_0) : uv^iwx^jy$ ” ersetzen.
7. “ $(\exists u, v, w, x, y \text{ mit } \dots)(\forall i \in \mathbb{N}_0)$ ” durch “ $(\forall i \in \mathbb{N}_0)(\exists u, v, w, x, y \text{ mit } \dots)$ ” ersetzen.

Welche Auswirkungen hätten diese Änderungen? Geben Sie gegebenenfalls Sprachen an, die die geänderte Eigenschaft erfüllen, die ungeänderte Eigenschaft jedoch nicht (oder umgekehrt). Begründen Sie Ihre Aussagen.

Hinweis: Denken Sie bei 5. an $L = \{a^n b^n c^n d^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0\} \cup \{a, b, c\}^*$, und bei 7. an $L = \{b^j a^p b^p c^p \mid j \in \mathbb{N}_0, j \neq 0, p \in \mathbb{N}_0, p \neq 0\}$.

Aufgabe 15

Sei $L := \{a^n b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0 \wedge n \neq m\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

1. L hat nicht die reguläre Pumping-Eigenschaft.
2. L hat die kontextfreie Pumping-Eigenschaft.

Hinweis: L ist nicht kontextfrei. Dies kann mit Hilfe von Ogden's Lemma nachgewiesen werden, gute Studierende können den Beweis versuchen. Die Anwendung von Ogden's Lemma ist nicht wesentlich schwieriger als die Anwendung des Pumping Lemmas. (Zu Ogden's Lemma siehe http://en.wikipedia.org/wiki/Ogden%27s_lemma, bzw. William Ogden: A Helpful Result for Proving Inherent Ambiguity, Mathematical Systems Theory, 2(3), pp. 191-194, 1968.)

Aufgabe 16

Welche der folgenden Sprachen sind kontextfrei? Beweisen sie Ihre Aussagen!

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, w = v\} \\
 L_2 &= \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, |w| = |v|\} \\
 L_3 &= \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, w \neq v\} \\
 L_4 &= \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, w \neq v, |w| = |v|\} \\
 L_5 &= \{a, b\}^* \setminus \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\} \\
 L_6 &= \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, w = \overleftarrow{v}\} \\
 L_7 &= \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, |w| = |\overleftarrow{v}|\} \\
 L_8 &= \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, w \neq \overleftarrow{v}\} \\
 L_9 &= \{wvu \mid w, v, u \in \{a, b\}^*, w = v = u\} \\
 L_{10} &= \{wcvcu \mid w, v, u \in \{a, b\}^*, w = v = u\} \\
 L_{11} &= \{wvu \mid w, v, u \in \{a, b\}^*, w = \overleftarrow{v} = u\}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 17 (für gute Studierende)

Wir betrachten eine Sprache L mit folgenden Eigenschaften: L hat die kontextfreie Pumping-Eigenschaft, es gibt ein Verfahren, das die Konstante in der Pumping Eigenschaft bestimmt und es gibt ein Verfahren, das das Wortproblem ($w \in L?$) entscheidet [Dies Voraussetzungen sind zum Beispiel bei den durch kontextfreie Grammatiken beschriebenen Sprachen gegeben. (Übung: Wieso?)]. Skizzieren Sie Verfahren (unter Benutzung der vorgegebenen Verfahren), die das Leerheits-Problem ($L = \emptyset?$) und das Endlichkeits-Problem ($|L| \neq \infty?$) für L entscheiden.

Aufgabe 18

Sei $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} \wedge (i = j \vee j = k)\}$.

1. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G für L an.
2. Konstruieren Sie nach dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren zu G einen Kellerautomaten P , der L erkennt.
3. Geben Sie für Ihre Grammatik G zum Wort $w = a^3 b^3 c^3$ alle Ableitungsbäume an.
4. Geben Sie zu jedem der Ableitungsbäume die entsprechenden Läufe auf w von P an.

Aufgabe 19

Sei: $L_1 := \{a, d\}^* \cdot \{b, d\}^* \cdot \{c, d\}^*$
 $L_2 := \{w \in L_1 \mid \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$
 $L_3 := \{xyz \in L_1 \mid x, z \in \{a, b, c, d\}^* \wedge y \in \{ab, bc\}\}$
 $L_4 := L_2 \cup L_3$

Welche der Sprachen L_1, \dots, L_4 besitzen die kontextfreie Pumping-Eigenschaft? Welche der Sprachen L_1, \dots, L_4 sind kontextfrei?

Hinweis: Welche Rolle spielen die Zeichen d in den Sprachen L_1, \dots, L_4 ?

Aufgabe 20

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gibt eine kontextfreie Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft nicht hat.
2. Jede reguläre Sprache hat die kontextfreie Pumping-Eigenschaft.
3. Es gibt eine Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft hat, aber nicht die kontextfreie Pumping-Eigenschaft hat.
4. Jede Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft hat, hat auch die kontextfreie Pumping-Eigenschaft.
5. Jede Sprache, die die kontextfreie Pumping-Eigenschaft hat, hat auch die reguläre Pumping-Eigenschaft.
6. Jede Sprache, die die kontextfreie Pumping-Eigenschaft hat ist regulär.

Aufgabe 21

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet und seien $L, R \subseteq \Sigma^*$ beliebige Sprachen über Σ . Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Sie dürfen die in der Vorlesung bewiesenen Sätze verwenden, müssen diese aber zitieren.

1. Keine Teilmenge einer kontextfreien Sprache ist regulär.
2. $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*) \wedge R \in \text{CFL} \implies L \cap R \in \text{CFL}$ (wobei $L, R \subseteq \Sigma^*$).
3. $L \in \text{CFL} \wedge R \in \text{CFL} \implies L \cap R \in \text{REG}$.
4. $L \in \text{CFL} \implies \Sigma^* \setminus L \notin \text{CFL}$.
5. Jede unendliche reguläre Sprache ist disjunkte Vereinigung zweier unendlicher regulärer Sprachen.
6. Es gibt kontextfreie nichtreguläre Sprachen, die disjunkte Vereinigung von zwei unendlichen kontextfreien Sprachen sind.
7. Die Vereinigung einer nicht-regulären Sprache mit einer kontextfreien Sprache ist nicht-regulär.
8. Zu jeder kontextfreien Sprache gibt es unendlich viele kontextfreie Grammatiken, die diese Sprache erzeugen.
9. Es gibt nur abzählbar unendlich viele kontextfreie Sprachen über dem Alphabet $\{a, b\}$.