Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 6

Besprechung in KW 47 / Abgabe in KW 48

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 13, 14, 15, 16 und 17

Aufgabe 1

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Recherchieren Sie die Begriffe *endlich*, *abzählbar*, *abzählbar unendlich* und *überabzählbar.*
2. Die Klasse der kontextfreie Sprachen über $\{0,1\}^*$ ist endlich.
3. Die Klasse der kontextfreie Sprachen über $\{0,1\}^*$ ist abzählbar unendlich.
4. Die Klasse der kontextfreie Sprachen über $\{0,1\}^*$ ist überabzählbar unendlich.
5. Es gibt Sprachen über $\{0,1\}^*$, die nicht-kontextfreie sind.

Aufgabe 4

Sei $G = (\{S\}, \{a\}, \{S \to SS, S \to a\}, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Bestimmen Sie die von G erzeugte Sprache $L(G)$. Geben Sie alle Ableitungsbäume bezüglich G für das Wort $w = a^5$ an. Gibt es eine Grammatik G' für $L(G)$, so dass jedes Wort in $L(G)$ nur einen Ableitungsbaum bezüglich G' hat? Ist $L(G)$ inhärent mehrdeutig?

Definition: Eine kontextfreie Grammatik G heißt *mehrdeutig* genau dann, wenn es ein Wort w in $L(G)$ gibt, das mindestens zwei unterschiedliche Ableitungtungsbäume hat. Eine kontextfreie Sprache L heißt *inhärent mehrdeutig* genau dann, wenn jede L erzeugende kontextfreie Grammatik G (also mit $L(G) = L$) mehrdeutig ist.

Aufgabe 5

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Wir betrachten die folgenden Sprachen über Σ.

$$\emptyset,\ \{\lambda\},\ \emptyset^*,\ \{\lambda\}^*,\ \{a,b,c\}^*,\ \{a,b\}^+,\ \{a,b,c\},\ \{abc\},\ \{a,b,c\}^3$$

Geben Sie für jede dieser Sprachen einen erkennenden (nicht-deterministischen) Kellerautomat an.

Aufgabe 6

Geben Sie jeweils allgemeine Grammatiken an, die die Sprachen L_i erzeugen:

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}\\
L_2 &:= \{a^{n^2} b a^n \mid n \in \mathbb{N}\}\\
L_3 &:= \{\mathrm{bin}(n) \cdot a^n \mid n \in \mathbb{N}\}\\
L_4 &:= \{\mathrm{bin}(n)\$\,\mathrm{bin}(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}\\
L_5 &:= \{\mathrm{bin}(n)\$\,\mathrm{bin}(m)\$\{\mathrm{bin}(n+m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

Notation: Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet $\mathrm{bin}(n)$ die Binärdarstellung von n, ohne führende Nullen, mit der niederwertigsten Ziffer hinten.

Aufgabe 7
Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik und $S' \notin N$ ein neues Nonterminal. Welche Sprache wird dann durch $G' = (N \cup \{S'\}\, , T\, , P \cup \{S' \to S, S' \to S'S'\}\, , S')$ erzeugt?

Aufgabe 8
Seien $G_1 = (N_1, T, P_1, S_1)$ und $G_2 = (N_2, T, P_2, S_2)$ kontextfreie Grammatiken mit $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ und $(N_1 \cup N_2) \cap T = \emptyset$,und $S' \notin N$ ein neues Nonterminal. Welche Sprache wird dann durch $G' = (N_1 \cup N_2 \cup \{S'\}\, , T\, , P_1 \cup P_2 \cup \{S' \to S_1, S' \to S_2\}\, , S')$ erzeugt?

Aufgabe 9
Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik mit $N = \{S\}$, $T = \{(,), \Phi, a, b, c, \cdot, \cup, ^*\}$ und

$$P = \{S \to (\Phi), S \to (a), S \to (b), S \to (c), S \to (S \cdot S), S \to (S \cup S), S \to (S)^*\}.$$

Welche Sprache wird von der Grammatik G erzeugt?

Aufgabe 10
Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie erkennende (nicht-deterministische) Kellerautomaten sowie erzeugende kontextfreie Grammaitiken für folgende Sprachen L_i an:

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{w \in \{a,b,c\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}\\
L_2 &:= \{w \in \{a,b,c\}^* \mid aba \text{ oder } bab \text{ ist Teilwort } w\}\\
L_3 &:= L_1 \cup L_2\\
L_4 &:= L_1 \cap L_2\\
L_5 &:= L_1 \cdot L_2
\end{aligned}$$

Aufgabe 11
Sei $P = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ ein nichtdeterministischer Kellerautomat (NPDA). Sei $\perp$ ein neues Zeichen, dass weder in Σ noch in Γ ist. Wir definieren:

$$\begin{aligned}
L(P) &:= \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F \text{ mit } (q_0, w, \lambda) \vdash_P^* (p, \lambda, \lambda)\}\\
L_\lambda(P) &:= \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in K \text{ mit } (q_0, w, \lambda) \vdash_P^+ (p, \lambda, \lambda)\}\\
L_f(P) &:= \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F\, \exists \alpha \in \Gamma^* \text{ mit } (q_0, w, \lambda) \vdash_P^* (p, \lambda, \alpha)\}\\
L_\perp(P) &= \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F \text{ mit } (q_0, w, \perp) \vdash_P^* (p, \lambda, \lambda)\}
\end{aligned}$$

1. Gilt für jeden NPDA P, dass $L(P) = L_f(P)$ ist? (Begründung!)
2. Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie:
   Es gibt ein NPDA P mit $L(P) = L \iff$ es gibt ein NPDA P mit $L_f(P) = L$.
3. Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie:
   Es gibt ein NPDA P mit $L(P) = L \iff$ es gibt ein NPDA P mit $L_\perp(P) = L$.
4. Gilt für jeden NPDA P, dass $L(P) = L_\lambda(P)$ ist? (Begründung!)
5. Zeigen Sie: Für jeden NPDA P gilt: $\lambda \in L_\lambda(P)$
6. Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Gilt die folgende Aussage: Es gibt ein NPDA P mit $L(P) = L \iff$ es gibt ein NPDA P mit $L_\lambda(P) = L$.

Aufgabe 12
Konstruieren Sie zur kontextfreien Grammatik $G = (\{S, A, B, C\}\, , \{a, b, c, d\}\, , P\, , S)$ einen Pushdown-Automaten, wobei $P := \{S \to dSd, S \to dAd, A \to BC, B \to bb, C \to aCa, C \to cc\}$. Wenden Sie das in der Vorlesung vorgestellten Verfahren (Top-Down) an.
Sei $w := ddbbaaaccaaadd$. Geben Sie einen Ableitungsbaum B für w an. Geben Sie für den konstruierten Pushdown-Automaten einen dem Ableitungsbaum B entsprechenden Lauf auf dem Wort w an. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 13
Beweisen Sie, dass die Klasse der kontextfreien Sprachen unter Vereinigung, Konkatenation und Iteration (*-Bildung) abgeschlossen sind.

Aufgabe 14
Wir betrachten die Trägermenge A und binäre Relationen R und S auf A (also $R, S \subseteq A \times A$). Wir definieren die Verknüpfung $\circ$ auf Menge der binären Relationen auf A vermöge $R \circ S := \{(x, y) \mid \exists z \in A : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S\}$. Weiterhin definieren wir $R^0 := \mathrm{id}_A$ sowie $R^{i+1} := R^i \circ R$ für $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Schließlich $R^* := \cup_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} R^i$. Zeigen Sie:

1. Die Verknüpfung $\circ$ ist assoziativ auf der Menge der binären Relationen über A.
   [Zusatzfrage: Ist dies von Bedeutung im Hinblick auf die Definition von R^i?]
2. R^* ist reflexiv und transitiv.
3. R^* ist die kleinste reflexiv-transitive Relation, die R umfasst.
4. Ist $\mathcal{R}$ die Menge aller reflexiv-transitive Relationen, die R umfassen, so gilt: $R^* = \cap_{S \in \mathcal{R}} S$.

Aufgabe 15
Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Auf N ist die Relation $\backsim$ definiert vermöge

$$X \backsim Y \;:\Longleftrightarrow\; X \xrightarrow{*} Y \wedge Y \xrightarrow{*} X.$$

sowie auf $N/\backsim$ die Relation $\rightsquigarrow$ vermöge

$$A \rightsquigarrow B \;:\Longleftrightarrow\; \exists X \in A, \exists Y \in B \text{ mit } (X, Y) \in P.$$

Zeigen Sie, dass $\backsim$ eine Äquivalenzrelation und $\rightsquigarrow^*$ eine Ordnungsrelation ist. ($\rightsquigarrow^*$ ist die reflexiv transitive Hülle von $\rightsquigarrow$.)

Aufgabe 16
Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie erkennende Kellerautomaten sowie erzeugende kontextfreie Grammaitiken für folgende Sprachen L_i an:

$$\begin{aligned}
&L_1 := \{wv \mid v \in \{c\}^+,\, w \in \{a, b\}^*,\, |w| = |v|\}\\
&L_2 := \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\ ,\ i < j\}\\
&L_3 := L_1 \cdot L_2
\end{aligned}$$

Aufgabe 17
Konstruieren Sie zur kontextfreien Grammatik $G := (\{S, A, B, C\}\,, \{a, b, c, d\}\,, P\,, S)$ Pushdown-Automaten nach dem in der Vorlesung beschriebenen Verfahren, wobei
$P := \{S \to AbS, S \to CAB, A \to cA, A \to a, B \to CBb, B \to b, C \to dd\}$.
Sei $w := ccabddcaddddbbb$. Geben Sie einen Ableitungsbaum B für w an. Geben Sie für den konstruierten Pushdown-Automaten jeweils einen dem Ableitungsbaum B entsprechenden Lauf auf dem Wort w an. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise!