

Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 5

Besprechung in KW 46 / Abgabe in KW 47

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von: – Aufgabe 1,
– Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
– Aufgaben 12, 13, 14, 15 und 16

Aufgabe 1

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

Beweisen Sie mit Hilfe von endlichen Automaten, dass die regulären Sprachen unter Homomorphismus und inversem Homomorphismus abgeschlossen sind. Verwenden Sie im Beweis weder reguläre Ausdrücke noch Grammatiken.

Hinweis: Sei h ein Homomorphismus. Angenommen, L werde vom deterministischen endlichen Automaten M erkannt. Wir erhalten einen endlichen Automaten für $h(L)$, wenn vom Zustand p mit dem Zeichen a in den Zustand q übergegangen wird, der beim Automaten M von p aus mit $h(a)$ erreicht wird. Umgekehrt erhalten wir einen endlichen Automaten für $h^{-1}(L)$, wenn es von p aus einen Pfad für $h(a)$ nach q gibt, falls von p mit a nach q übergegangen wird.

Definition: $h(L) := \{h(x) \mid x \in L\}$, $h^{-1}(L) := \{x \mid h(x) \in L\}$

Aufgabe 4

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$, sowie h und g Homomorphismen von Σ^* nach Σ^* mit:

$$\begin{array}{ll} h(a) = ab & g(a) = a \\ h(b) = ba & g(b) = c \\ h(c) = ccc & g(c) = \lambda \end{array}$$

- Geben Sie $h(L)$, $g(L)$, $h^{-1}(L)$ und $g^{-1}(L)$ für folgende Sprachen L_i an ($i = 1, 2, 3$):

$$L_1 := \{acccaa, ababba, \lambda\}, \quad L_2 := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad L_3 := \{wccc\overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}.$$

- Sei $M = (\{1, 2, 5, 6, 7, 8\}, \{a, b, c\}, \delta, \{1\}, \{5, 6\})$ ein nichtdeterministischer endlicher Automaten, mit δ gegeben durch:

δ	1	2	5	6	7	8
a	2, 5	5	–	–	–	7
b	–	2	2	–	–	–
c	–	6	–	7	7, 8	8

Konstruieren Sie NFAs die $h(L(M))$, $g(L(M))$, $h^{-1}(L(M))$ und $g^{-1}(L(M))$ erkennen.

Aufgabe 5

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ L und R reguläre Sprachen über Σ sowie h und g Homomorphismen von Σ^* nach Σ^* . Zeigen Sie, dass dann auch $g(h^{-1}(L) \cap R)$ regulär ist. [Sie dürfen selbstverständlich die in der Vorlesung gezeigten Sätze benutzen.]

Aufgabe 6

Wir betrachten die Sprachen L_2 , L_3 und L_4 sowie die Sprachen: L'_2 , L'_3 und L'_4 :

$$\begin{aligned} L_2 &:= \{w \in \{a, b, c\}^* \mid aa, ab, ba \text{ oder } bb \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } w \text{ enthält genau so viele } a\text{'s wie } b\text{'s}\} \\ L'_2 &:= \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_3 &:= \{w \in \{a, b\}^* \mid aa \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } bb \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } |w| \text{ ist eine Quadratzahl}\} \\ L'_3 &:= \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ ist eine Quadratzahl}\} \\ L_4 &:= L((a+b)^* \cdot (aa+bb) \cdot (a+b)^*) \cup \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ ist Primzahl}\} \\ L'_4 &:= \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ ist Primzahl}\} \end{aligned}$$

1. Geben Sie Homomorphismen h_2 , h_3 und h_4 , g_2 , g_3 und g_4 sowie reguläre Sprachen R_2 , R_3 und R_4 an, so dass $L'_i = g_i(h_i^{-1}(L_i) \cap R_i)$ gilt für $i = 2, 3, 4$.
2. Zeigen Sie (mit Hilfe der vorhergehenden Aufgabe), dass die Sprachen L_2 , L_3 und L_4 nicht regulär sind.
3. (Wiederholung) Zeigen Sie, dass die Sprachen L_2 , L_3 und L_4 die reguläre Pumpingeigenschaft haben.

Aufgabe 7

Sei f eine totale monotone Funktion von \mathbb{N} nach \mathbb{N} mit folgender Eigenschaft:

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists i \in \mathbb{N} : f(i+1) > f(i) + k$$

Sei weiterhin $L := \{a^{f(i)} \mid i \in \mathbb{N}\}$.

1. Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass L nicht regulär ist.
2. Bestimmen Sie die Kongruenzklassen von L .

Aufgabe 8

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Geben Sie Grammatiken für folgende Sprachen über Σ an

$$\emptyset, \{\lambda\}, \emptyset^*, \{\lambda\}^*, \{a, b, c\}^*, \{a, b\}^+, \{a, b, c\}, \{abc\}, \{a, b, c\}^3$$

Aufgabe 9

Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie kontextfreie Grammatiken für folgende Sprachen L_i an:

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{a^{2n} c b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_2 &:= \{w \in \{a, b, c\}^* \mid aba \text{ oder } bab \text{ ist Teilwort } w\} \\ L_3 &:= \{wv \mid v \in \{c\}^*, w \in \{a, b\}^*, |w| = |v|\} \\ L_4 &:= \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i < j\} \\ L_5 &:= L_1 \cup L_2 \\ L_6 &:= L_3 \cdot L_4 \end{aligned}$$

Aufgabe 10

Geben Sie jeweils rechtslineare Grammatiken an, die die Sprachen L_i erzeugen:

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } abaab \text{ nicht}\} \\ L_2 &:= \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 3\} \\ L_3 &:= \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 3 = 0 \vee \#_a(w) \bmod 3 = 2\} \end{aligned}$$

Aufgabe 11

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gibt eine kontextfreie Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft nicht hat.
2. Jede kontextfreie Sprache hat die reguläre Pumping-Eigenschaft.
3. Es gibt eine kontextfreie Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft hat.
4. Es gibt eine kontextfreie nicht-reguläre Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft hat.

Aufgabe 12

Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie kontextfreie Grammatiken für folgende Sprachen L_i an:

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \text{Weder } abba \text{ noch } baba \text{ ist Teilwort von } w\} \\ L_2 &:= \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\} \\ L_3 &:= \{wcv\overline{c^w} \mid w, v \in \{a, b\}^+\} \\ L_4 &:= \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 13

Geben Sie jeweils rechtslineare Grammatiken an, die die Sprachen L_i erzeugen:

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } bbaab \text{ nicht}\} \\ L_2 &:= \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \geq 4\} \\ L_3 &:= \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 3 = 1 \vee \#_b(w) \bmod 3 = 0\} \\ L_4 &:= \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 3 = 1 \wedge \#_b(w) \bmod 3 = 0\} \end{aligned}$$

Aufgabe 14

Sei $\Sigma = \{a, b\}$, L und R Sprachen über Σ und $h : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ ein Homomorphismus. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $h(L \cap R) = h(L) \cap h(R)$
2. $h^{-1}(L \cap R) = h^{-1}(L) \cap h^{-1}(R)$
3. $h(L \cup R) = h(L) \cup h(R)$
4. $h^{-1}(L \cup R) = h^{-1}(L) \cup h^{-1}(R)$
5. $L = h^{-1}(h(L))$
6. $L = h(h^{-1}(L))$

Aufgabe 15

Seien A und B vollständige deterministische finite Automaten, \approx_A und \approx_B die zu den Automaten gehörenden Rechtskongruenzrelationen, $\sim_{L(A)}$ und $\sim_{L(B)}$ die zu den erkannten Sprachen gehörenden Rechtskongruenzrelationen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. $L(A) = L(B) \implies \approx_A = \approx_B$.
2. $L(A) = L(B) \implies \sim_{L(A)} = \sim_{L(B)}$.
3. $\sim_{L(A)} \subseteq \approx_A$.

Aufgabe 16

Sei $\Sigma = \{a, b\}$.

Wir betrachten einen deterministischen vollständigen endlichen Automaten $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$.

Die zu M gehörende Rechtskongruenzrelation \approx_M auf Σ^* habe als Äquivalenzklassen:

$$\begin{aligned} &\{\lambda\}, \{a\}, \{b\}, \{aa\}, \{ab, ba\}, \{bb\}, \{bb\} \cdot \Sigma^{\geq 1}, \{ba, ab\} \cdot \Sigma^+, \\ &\{aa\} \cdot \{w \in \Sigma^+ \mid |w| \text{ gerade}\}, \{aa\} \cdot \{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ ungerade}\} \end{aligned}$$

Weiterhin akzeptiert M u.a. die Wörter b^0, a^1, b^2, ba sowie a^{4711} , und M verwirft u.a. die Wörter b, aa, b^{21}, bab sowie a^{42} .

1. Bestimmen Sie δ, s und F des Automaten M . Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise. Geben Sie auch eine graphische Darstellung des Automaten an.
2. Bestimmen Sie die Klassen der zu $L(M)$ gehörenden Rechtskongruenzrelation $\sim_{L(M)}$ auf Σ^* . Geben Sie für jede Klasse einen regulären Ausdruck an, der diese Klasse beschreibt. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise.

≈