Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 3

Besprechung in KW 44 / Abgabe in KW 45

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 16, 17, 18 und 19

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definieren wir die Relation $\mathcal{R}$ vermöge:

$$x\mathcal{R}y \;:\Longleftrightarrow x \equiv y \bmod k$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}$ eine Rechtskongruenzrelation auf $(\mathbb{Z}, +)$ und auf $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist.

Aufgabe 4
Kann man die reguläre Pumping-Eigenschaft wie folgt abändern?

1. "$(\forall w \in L$ mit $|w| \geq k)$" durch "$(\forall w \in L)$" ersetzen.
2. "$(\forall i \in \mathbb{N})$" durch "$(\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$" ersetzen.
3. "$(\forall w \in L$ mit $|w| \geq k)$" durch "$(\forall w \in \Sigma^*$ mit $|w| \geq k)$" ersetzen.
4. Die Bedingung "$v \neq \lambda$" weglassen.

Welche Auswirkungen hätten diese Änderungen? Geben Sie gegebenenfalls Sprachen an, die die geänderte Eigenschaft erfüllen, die ungeänderte Eigenschaft jedoch nicht (oder umgekehrt). Begründen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 5
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Zeigen Sie mit Hilfe des regulären Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen L_i über Σ nicht regulär sind.

$$\begin{array}{lcl} L_1 & := & \{w \in \{a,b\}^+ \mid \exists n \in \mathbb{N} : |w| = n^5\} \\ L_2 & := & \{wcw \mid w \in \{a,b\}^+\} \\ L_3 & := & \{a^{4n}b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_3 & := & \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \ \wedge \ k \text{ ist Primzahl}\} \end{array}$$

Aufgabe 6
Zeigen Sie, dass $L := \{w \in \{a, b\}^* \mid aa$ ist Teilwort von w oder bb ist Teilwort von w oder $|w|$ ist eine Kubikzahl$\}$ die reguläre Pumpingeigenschaft hat, aber nicht regulär ist.
Hinweis: Betrachten Sie $L \cap L((ab)^*)$.

Aufgabe 7
Sei L eine reguläre Sprache über dem Alphabet Σ. Zeigen Sie:

$$\exists k \in N \;\; \forall A \in \mathcal{P}(L) \text{ mit } |A| > k \;\; \exists w, w' \in A \;\; \exists x, x', y, y' \in \Sigma^* \text{ so, dass}$$
$$w \neq w' \;\wedge\; w = x \cdot y \wedge w' = x' \cdot y' \;\wedge\; |x| = \lfloor |w|/2 \rfloor \;\wedge\; |x'| = \lfloor w'|/2 \rfloor \;\wedge\; x \cdot y' \in L \wedge x' \cdot y \in L$$

Hinweis: Betrachten Sie die Läufe eines erkennenden DFA. $\mathcal{P}(L)$ bezeichnet die Potenzmenge von L.

Aufgabe 8
Seien A und B beliebige Teilmengen von $\{0,1\}^*$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche sind falsch? Beweisen Sie Ihre Behauptungen!

1. $(A)^+ = A^* \setminus \{\lambda\}$.
2. $(A)^* = A^+ \cup \{\lambda\}$.
3. Sind A und B regulär, so ist auch $A \setminus B$ regulär.
4. Sind A und B regulär pumpbar, so ist auch $A \cup B$ regulär.
5. Ist A regulär und $B \subseteq A$, so ist auch B regulär.
6. Jede endliche Sprache hat die reguläre Pumping-Eigenschaft.

Aufgabe 9
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet, $\alpha = (a \cup aba)^* \cdot a$ ein regulärer Ausdruck über Σ und $L = \mathcal{L}(\alpha)$. Konstruieren Sie ein λ-NFA zu L, einen DFA zu L, einen DFA zu $\overline{L} := \Sigma^* \setminus L$ sowie einen regulären Ausdruck zu $\overline{L}$. Beschreiben Sie das Konstruktionsverfahren.

Aufgabe 10
Erkennen die beiden finiten Automaten $M_1 = (\{0,1,2,3,4,5,6,7\}, \{a,b\}, \delta_1, 0, \{4,5,6\})$ und $M_2 = (\{0,1,2,3,4,5,6,7\}, \{a,b\}, \delta_2, 0, \{2,5\})$ die gleiche Sprache? δ_1 und δ_2 sind gegeben durch:

δ_1	a	b
0	2	1
1	2	3
2	4	7
3	2	3
4	0	5
5	1	6
6	0	5
7	5	2

δ_2	a	b
0	1	3
1	2	6
2	3	2
3	4	0
4	5	7
5	0	5
6	2	1
7	5	7

Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Konstruieren Sie zunächst die minimalen DFA.

Aufgabe 11
Sei $L := \{a^n b^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie:

1. Die Wörter aus $\{a\}^*$ sind paarweise nicht äquivalent (bzgl. $\approx_L$).
2. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $[a^i] = \{a^i\}$.
3. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $[a^{i+1}b^{2i+3}] = \{a^j b^l \mid j, l \in N \wedge l > 0 \wedge 3j - l = i\}$.
4. $\Sigma^*/\approx_L = \big\{\{a^i\} \mid i \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{[a^{i+1}b^{2i+3}] \mid i \in \mathbb{N}\big\} \cup \{[b]\}$.

Hinweis: $\Sigma^*/\approx_L$ bezeichnet die Menge aller Äquivalenzklassen von $\approx_L$ auf Σ^*.

Aufgabe 12
Zeigen Sie mit Hilfe der vorhergehenden Aufgabe, dass die Sprachen $L_{\text{PAL}} := \{w \cdot \overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ und $L_{\text{Copy}} := \{w \cdot w \mid w \in \{a,b\}^*\}$ nicht regulär sind.

Aufgabe 13
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Geben Sie jeweils alle Klassen der zu folgenden Sprachen gehörenden Relationen an:

$$\begin{aligned} L_0 &:= \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_1 &:= \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_2 &= \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 14
Sei $n_0 := 0$ und $n_{i+1} := n_i + 2i + 1$ für $i \in \mathbb{N}$, weiter sei $Q := \{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Wir betrachten die Sprache $L := \{a^j \mid j \in Q\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a\}$, sowie die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$. Zeigen Sie:

1. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $[a^i] = \{a^i\}$.
2. $\Sigma^* / \approx_L = \big\{\{a^i\} \mid i \in \mathbb{N}\big\}$.
3. $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 15
Wir betrachten das Alphabet $\Sigma = \{a\}$. Geben Sie jeweils alle Klassen der zu folgenden Sprachen gehörenden Relationen an:

$$\begin{aligned}
L_{21} &:= \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n < 5\} \\
L_{22} &:= \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \\
L_{23} &:= \{a^p \mid p \in \mathbb{N} \wedge p \text{ ist Primzahl}\} \\
L_{24} &:= \{a^{(2^n)} \mid n \in \mathbb{N}\} \\
L_{25} &:= \{(a^2)^n \mid n \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 16
Sei $\Sigma = \{a, b, d\}$ ein Alphabet. Zeigen Sie mit Hilfe des regulären Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen L_i über Σ nicht regulär sind.

$$\begin{aligned}
L_4 &:= \{w \cdot d \cdot \overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^+\} \\
L_5 &:= \{w \in \{a,b,d\}^+ \mid \exists n \in \mathbb{N} : |w| = n^4\} \\
L_6 &:= \{a^n d^n b^k \mid n, m, k \in \mathbb{N} \ \wedge \ m \text{ ist Primzahl}\}
\end{aligned}$$

Definition: $\overleftarrow{w}$ ist induktiv definiert vermöge $\overleftarrow{\lambda} := \lambda$ sowie $\overleftarrow{v \cdot x} := x \cdot \overleftarrow{v}$ für $x \in \Sigma$ und $v \in \Sigma^*$.

Aufgabe 17
Seien A und B beliebige Teilmengen von $\{0,1\}^*$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche sind falsch? Beweisen Sie Ihre Behauptungen!

1. Ist A regulär pumpbar und $B \subseteq A$, so ist auch B regulär pumpbar.
2. Ist A nicht regulär pumpbar und $A \subseteq B$, so ist auch B nicht regulär pumpbar.
3. Ist A regulär und $B \subseteq A$, so ist auch B regulär.
4. Ist $A \cap B$ regulär, so sind auch A und B regulär.
5. Es gibt eine endliche Sprache über dem Alphabet $\{0,1\}$, welche die reguläre Pumping-Eigenschaft nicht besitzt.

Aufgabe 18
Gegeben sei der folgende λ-NFA $M = (\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}\,\{a,b\}, \delta, 1, \{2,3,9,8,10\})$.

δ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	$\{3\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{5\}$	$\{6,4\}$	$\emptyset$	$\{4,5\}$	$\{9,10\}$	$\{8\}$	$\{8\}$
b	$\emptyset$	$\{4\}$	$\{7\}$	$\{8\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{9\}$	$\{1\}$	$\{3\}$	$\{2\}$
λ	$\{2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{7\}$	$\{7\}$	$\{4\}$	$\emptyset$	$\{8\}$	$\emptyset$

Beschreiben Sie alle Klassen der zu $L(M)$ gehörenden Rechtskongruenzrelation $\approx_{L(M)}$.
Hinweis: Konstruieren Sie zunächst einen äquivalenten DFA.

Aufgabe 19
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$, A und B vollständige deterministische finite Automaten, $\sim_A$ und $\sim_B$ die zu den Automaten gehörenden Rechtskongruenzrelationen, $\approx_{L(A)}$ und $\approx_{L(B)}$ die zu den erkannten Sprachen gehörenden Rechtskongruenzrelationen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. $L(A) \subseteq L(B) \quad \Longrightarrow \quad \sim_A \subseteq \sim_B$
2. $\approx_{L(A)} \subseteq \approx_{L(B)} \quad \Longrightarrow \quad \sim_A \subseteq \sim_B$
