

Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 11

Besprechung in KW 02 / Abgabe in KW 03

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von:

- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 15, 16, 17, 18, 19 und 20

Aufgabe 1

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

1. L ist entscheidbar.
2. L und \bar{L} sind semi-entscheidbar.
3. Es gibt eine Turingmaschine, die akzeptierend stoppt falls $x \in L$, und verwerfend stoppt, falls $x \notin L$.
4. $L = \text{Bild}(f)$ für eine totale berechenbare streng-monoton steigende Funktion $f : \{1\}^* \rightarrow \Sigma^*$ oder L ist endlich.
5. Die charakteristische χ_L Funktion von L ist berechenbar.

Aufgabe 4

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

1. L ist rekursiv aufzählbar.
2. L ist semi-entscheidbar.
3. $L = \text{Bild}(f)$ für eine totale injektive berechenbare Funktion $f : \{1\}^* \rightarrow \Sigma^*$ oder L ist endlich.
4. $L = \text{Bild}(f)$ für eine totale berechenbare Funktion $f : \{1\}^* \rightarrow \Sigma^*$ oder $L = \emptyset$.
5. $L = \text{Bild}(f)$ für eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$.
6. $L = \text{Def}(f)$ für eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$.
7. Die semi-charakteristische φ_L Funktion von L ist berechenbar.

Aufgabe 5

Zeigen Sie für folgende Sprachpaare (L_1, L_2) , daß $L_1 \leq_m L_2$ und $L_2 \leq_m L_1$.

1. $L_1 := \{aa\}$ und $L_2 := \{b, a\}$,
2. $L_1 := \{aa\}$ und $L_2 := \{w \in \{c\}^* \mid |w| \text{ ist durch } 4 \text{ teilbar}\}$,
3. $L_1 := \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \text{ ist gerade}\}$ und $L_2 := \{w \in \{c\}^* \mid |w| \text{ ist durch } 4 \text{ teilbar}\}$,
4. $L_1 := \{w\bar{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}$ und $L_2 := \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Aufgabe 6

Sind folgende Funktionen $f : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$ Reduktionen von L_1 auf L_2 ($L_1, L_2 \subseteq \{a, b\}^*$)?

1. $f(w) := a^{\#_a(w)}$, $L_1 := \{ab\}$ und $L_2 := \{b, a\}$.
2. $f(w) := ww$, $L_1 := \{w \in \{a, b\}^* \mid 2 \text{ teilt } |w|\}$ und $L_2 := \{w \in \{a, b\}^* \mid 4 \text{ teilt } |w|\}$,
3. $f(w) := (bb)^{\#_a(w)}$, $L_1 := \{(aab)^n \in \{a, b\}^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $L_2 := \{w \in \{a, b\}^* \mid 4 \text{ teilt } \#_b(w)\}$,
4. $f(w) := w\overleftarrow{w}$, $L_1 := \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ endet mit } aa\}$ und $L_2 := \{w \in \{a, b\}^* \mid aaa \text{ Teilwort von } w\}$,
5. $f(w) := w\overleftarrow{w}$, $L_1 := \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ endet mit } a\}$ und $L_2 := \{uaav \mid u, v \in \{a, b\}^* \wedge |u| = |v|\}$.

Aufgabe 7

Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche nicht-aufzählbare Menge und sei $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ definiert durch:

$$f(i) := \begin{cases} \min(A) & \text{falls } i = 0, \\ \min(A \setminus \{f(l) \mid l = 0, \dots, i - 1\}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

1. f ist eine totale Bijektion $f : \mathbb{N} \rightarrow A$.
2. Die Funktion f ist keine Reduktion von \mathbb{N} auf A .
3. Die Funktion $g : \{a\}^* \rightarrow \{a\}^*$ mit $g(a^n) := a^{f(n)}$ ist keine Reduktion von $\{a\}^*$ auf $\{a^i \mid i \in A\}$.

Aufgabe 8

Wir betrachten die Funktion f , welche das Programm u einer Turing-Maschine M_u in das Programm v einer Turing-Maschine M_v abbildet die sich wie folgt verhält:

- Bei Eingabe eines Wortes x löscht M_v zunächst seine Eingabe (d.h. M_v ersetzt x durch λ). Anschließend schreibt M_v das Paar (u, u) auf das Band und verhält sich anschließend wie die universelle Turing Maschine (d.h. M_v simuliert M_u auf Input u). Anschließend löscht M_v ihr Band und stoppt.

Zeigen Sie:

1. f ist berechenbar.
2. f ist jeweils eine Reduktionsfunktion von $H_1 = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u) \downarrow\}$ auf die folgenden Sprachen L_i ($i = 1, \dots, 4$)

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v(\lambda) \downarrow\} \\ L_2 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } L(M_v) \neq \emptyset\} \\ L_3 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ stoppt für unendlich viele Eingaben}\} \\ L_4 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } \exists x : M_v(x) \downarrow \lambda\} \\ L_5 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } \forall x : M_v(x) \downarrow \lambda\} \end{aligned}$$

Aufgabe 9

Sei $L_1 := \{x \mid x \text{ ist Code einer TM und } \exists y : M_x(y) \downarrow 11\}$, und $L_2 := \{x \mid x \text{ ist Code einer TM und } \exists z : M_x(x) \downarrow z \wedge z \neq x\}$.

Zeigen Sie, daß L_1 und L_2 aufzählbar sind,

- indem Sie jeweils eine erkennende Turing-Maschine skizzieren, sowie
- indem Sie L_1 bzw. L_2 jeweils auf $H_1 = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u) \downarrow\}$ reduzieren.

Aufgabe 10

Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0, 1\}^*$)

1. $(A \leq_{\text{mo}} B \wedge B \in \text{REC}) \implies A \in \text{REC}$.
2. $(A \leq_{\text{mo}} B \wedge A \notin \text{RE}) \implies B \notin \text{RE}$.
3. Ist A entscheidbar, $B \neq \emptyset$, $B \neq \{0, 1\}^*$, dann ist $A \leq_{\text{mo}} B$.
4. $[L \in \text{RE} \wedge L \notin \text{REC}] \implies [L \not\leq_{\text{mo}} \overline{L} \text{ und } \overline{L} \not\leq_{\text{mo}} L]$.
5. $H_1 \leq_{\text{mo}} (\{1\} \cdot H_1 \cup \{0\} \cdot \overline{H_1})$, $\overline{H_1} \leq_{\text{mo}} (\{1\} \cdot H_1 \cup \{0\} \cdot \overline{H_1})$
6. Es gibt eine Sprache L , so daß weder die Sprache L noch ihr Komplement \overline{L} aufzählbar sind.
7. Es gibt nicht-entscheidbare Sprachen A und B mit $A \leq_{\text{mo}} B$ und $B \not\leq_{\text{mo}} A$.

Aufgabe 11

Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0, 1\}^*$, vollständig jeweils bezüglich \leq_{mo})

1. (A RE-vollständig und $A \leq_{\text{mo}} B$ und $B \in \text{RE}$) $\implies B$ RE-vollständig.
2. H ist RE-vollständig ist:
Hinweis: Zu $L(M_u)$ definiere $f_u : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ mit $f_u(w) = \langle u, v \rangle$
3. H_1 ist RE-vollständig.
Hinweis: Zeigen Sie $H \equiv_{\text{mo}} H_1$
4. Es gibt RE-vollständige Sprachen in $\{0\}^*$.
5. Keine entscheidbare Sprache ist RE-vollständig.
6. Jede nicht-triviale entscheidbare Sprache ist REC-vollständig..

Aufgabe 12

Wir betrachten die Funktion f , welche das Programm u einer Turing-Maschine M_u in das Programm v einer Turing-Maschine M_v mit Eingabealphabet Σ abbildet die sich wie folgt verhält:

Bei Eingabe eines Wortes $x \in \Sigma^*$ simuliert M_v zunächst M_u auf Input u für höchstens $|x|$ Schritte. Wird innerhalb diese $|x|$ Schritte die Simulation beendet (also stoppt M_u auf Input u in weniger als $|x|$ Schritten), startet M_v eine Endlosschleife (der Input x wird verworfen); wird die Simulation hingegen nicht beendet (M_u führt auf Input u mehr als $|x|$ Schritte aus, so löscht M_v ihr Band und stoppt. M_v akzeptierend (der Input x wird akzeptiert, λ wird ausgegeben).

1. Zeigen Sie, dass f berechenbar ist.
2. Zeigen Sie, dass f eine Reduktionsfunktion von $H_1 = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u) \downarrow\}$ auf die folgenden Sprachen L_i ist ($i = 1, 2, 3$)

$$L_1 := \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } L(M_v) \neq \Sigma^*\}$$

$$L_2 := \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } \exists x : M_v(x) \uparrow\}$$

$$L_3 := \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ stoppt nur für unendlich viele Eingaben}\}$$

3. Zeigen Sie, dass f eine Reduktionsfunktion von $\overline{H_1} = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u) \uparrow\}$ auf die folgenden Sprachen L_i ist ($i = 4, 5$)

$$L_4 := \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } L(M_v) = \Sigma^*\}$$

$$L_5 := \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } \forall x : M_v(x) \downarrow \lambda\}$$

Aufgabe 13

Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar? Bei welchen Sprachen kann der Satz von Rice angewendet werden? Begründen Sie ihre Angaben.

$$L_1 := \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ hat eine ungerade Anzahl von Zuständen}\}$$

$$L_2 := \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und bei Eingabe von } 010 \text{ wird im Laufe der Berechnung ein } a \text{ gedruckt}\}$$

$$L_3 := \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ stoppt für unendlich viele Eingaben.}\}$$

Aufgabe 14

Sei f eine Funktion aus Σ^* nach Σ^* . Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. f berechenbar $\implies \text{Bild}(f)$ aufzählbar.
2. f berechenbar $\implies \text{Def}(f)$ aufzählbar.
3. f berechenbar und total $\implies \text{Bild}(f)$ entscheidbar.
4. f berechenbar und total $\implies \text{Def}(f)$ entscheidbar.

Aufgabe 15

Geben Sie berechenbare Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 aus Σ^* nach Σ^* an, die folgende Eigenschaften haben:

1. $\text{Def}(f_1)$ nicht-entscheidbar und $\text{Bild}(f_1)$ entscheidbar.
2. $\text{Def}(f_2)$ nicht-entscheidbar und $\text{Bild}(f_2)$ nicht-entscheidbar.
3. $\text{Def}(f_3)$ entscheidbar und $\text{Bild}(f_3)$ nicht-entscheidbar.
4. $\text{Def}(f_4)$ entscheidbar und $\text{Bild}(f_4)$ entscheidbar.

Begründen Sie jeweils, weshalb die geforderten Eigenschaften erfüllt werden.

Aufgabe 16

Welche der Eigenschaften “reflexiv”, “symmetrisch”, “antisymmetrisch”, “transitiv” haben die Relationen “ \leq_{mo} ” bzw. “ \equiv_{mo} ” auf der Menge aller Sprachen über dem Alphabet $\{0,1\}^*$? Beweisen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 17

Sind folgende Funktionen $f : \{a,b\}^* \rightarrow \{a,b\}^*$ Reduktionen von L_1 auf L_2 ($L_1, L_2 \subseteq \{a,b\}^*$)?

1. $f(w) := (w\overleftarrow{w})^2$,
 $L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist Quadratzahl}\}$ und $L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist Quadratzahl}\}$,
2. $f(w) := (bb)^{\#_a(w)}$,
 $L_1 := \{(aba)^{3n} \in \{a,b\}^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid 6 \text{ teilt } \#_b(w)\}$

Aufgabe 18

Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0,1\}^*$)

1. $(A \leq_{\text{mo}} B \wedge B \in \text{RE}) \implies A \in \text{RE}$.
2. $(A \leq_{\text{mo}} B \wedge A \notin \text{REC}) \implies B \notin \text{REC}$.
3. $A \leq_{\text{mo}} B \iff \overline{A} \leq_{\text{mo}} \overline{B}$
4. $\neg(\overline{H_1} \leq_{\text{mo}} H_1)$
5. $(\{1\} \cdot H_1 \cup \{0\} \cdot \overline{H_1}) \not\leq_{\text{mo}} H_1$
6. Es gibt eine Sprache L , so daß weder die Sprache L noch ihr Komplement \overline{L} aufzählbar sind.
7. Sind A und B RE-vollständig, so gilt $A \equiv_{\text{mo}} B$.

Aufgabe 19

Zeigen sie, dass die folgenden Sprachen nicht entscheidbar sind, indem Sie $H_1 = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u) \downarrow\}$ auf diese Sprachen reduzieren:

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v(010) \downarrow\} \\ L_2 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } |L(M_v)| = \infty\} \\ L_3 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ stoppt immer}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 20

Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar? Bei welchen Sprachen kann der Satz von Rice angewendet werden? Begründen Sie ihre Angaben.

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ hat eine gerade Anzahl von Zuständen}\} \\ L_2 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und bei Eingabe von } \lambda \text{ wird im Laufe der Berechnung ein } a \text{ gedruckt}\} \end{aligned}$$

Definition [(semi-)charakteristische Funktion]:

Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sind die *semi-charakteristische Funktion* φ_L und die *charakteristische Funktion* χ_L definiert durch:

- $\varphi_L : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ mit $\varphi_L(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in L, \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\chi_L : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ mit $\chi_L(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in L, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Definition: [reduzierbar]:

$$\begin{aligned}
 LL' & \iff L \text{ (many-one) reduzierbar auf } L' \\
 & :\iff \exists f : \Sigma_L^* \rightarrow \Sigma_{L'}^*, \text{ total und berechenbar mit} \\
 & \quad \forall w \in \Sigma_L^* : w \in L \iff f(w) \in L' \\
 L \equiv_{\text{mo}} L' & :\iff (L \leq_{\text{mo}} L' \wedge L' \leq_{\text{mo}} L)
 \end{aligned}$$

Definition: [vollständig]:

Für eine Sprachklasse \mathcal{L} heisst eine Sprache A \mathcal{L} -vollständig bzgl. der Reduktion \leq_m genau dann, wenn $A \in \mathcal{L}$ und $\forall L \in \mathcal{L} : L \leq_{\text{mo}} A$.

Notation: Für eine Turing-Maschine M und ein Inputwort w bedeutet:

$$\begin{aligned}
 M(w) \uparrow & : M \text{ angesetzt auf } w \text{ stoppt nicht,} \\
 M(w) \downarrow & : M \text{ angesetzt auf } w \text{ stoppt,} \\
 M(w) \downarrow v & : M \text{ angesetzt auf } w \text{ stoppt mit Ausgabe } v. \\
 H & := \{\langle u, v \rangle \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(v) \downarrow\} \\
 H_1 & := \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u) \downarrow\}
 \end{aligned}$$
