

Randomisierte Algorithmen

Prof. Dr. Klaus Meer, Ameen Naif

Aufgabenblatt 6
Version 13.07.2016

Aufgabe 1.

- Zeigen Sie: Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen, dann sind auch e^X und e^Y unabhängige Zufallsvariablen.
- Finden Sie eine möglichst allgemeine hinreichende Bedingung für Funktionen f , so dass mit X und Y auch stets $f(X)$ und $f(Y)$ unabhängige Zufallsvariablen sind.
- Ist Ihre Bedingung aus Teilaufgabe b. auch notwendig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2.

(Randomisierter Routing-Alg. auf dem Hyperwürfel) Gegeben sei ein Hyperwürfel-Netzwerk mit $N = 2^n$ Knoten mit folgende Eigenschaften:

- jeder Knoten - ein Prozessor
- jede Kante - ein Kommunikationskanal
- Nachrichten - Pakete mit Startstationen und Endstationen
- eine Kante kann in einem Zeitschritt ein Paket transportieren
- ein Paket kann nicht mehr als eine Kante pro Schritt überqueren
- jeder Knoten hat eine Warteliste (Warteschlange) mit FIFO abarbeiten
- jeder Knoten sendet höchstens ein Paket und ist Adresse für höchstens ein Paket

Rando. Routing-Alg. arbeitet in zwei Phasen; erst sendet jedes Paket mit Bit-Fixing-Alg. von seiner Startstation i zu einer zufällig ausgewählten Zwischenstation σ_i , dann von der Zwischenstation zu seiner Endstation d_i mit Bit-Fixing-Alg.

Rando. Routing Alg. wird parallel für alle N Pakete ausgeführt. Nun Zeigen Sie:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass jedes Paket seinen Zwischenknoten nach spätestens $7n$ Schritten erreicht hat, ist mindestens $1 - 2^{-5n}$.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass jedes Paket sein Ziel nach spätestens $14n$ Schritten erreicht hat, ist mindestens $1 - 2^{-4n}$.
- Für $n \geq 3$ ist der Erwartungswert für die Laufzeit von Algorithmus kleiner oder gleich $14d + 1$.