Randomisierte Algorithmen

Prof. Dr. Klaus Meer, Ameen Naif

Aufgabenblatt 4
Version 15.06.2016

Aufgabe 1.

(Chernoff-Grenze, upper tail) Gegeben seien n unabhängige Zufallsvariablen X_i mit Werten in $\{0,1\}$ und $\Pr(X_i = 1) = p_i$. Wir betrachten die Zufallsvariable $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ mit Erwartungswert $\mu = E[X]$ und einem $\delta > 0$ und wollen die obere Chernoff-Grenze beweisen:

$$\Pr(X > (1+\delta)\mu) < \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^\mu$$

(a) Was sagt diese Ungleichung für z.B. $\delta = 1$ aus?

(b) Zeigen Sie $\mu = E[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i$.

(c) Zuerst ein naiver Ansatz: Wenden Sie die Markov-Ungleichung direkt auf $\Pr(X > (1+\delta)\mu)$ an. Was erhalten Sie?

(d) Wir benutzen $\Pr(X > (1+\delta)\mu) = \Pr(e^{tX} > e^{t(1+\delta)\mu})$ und wenden nun darauf die Markov-Ungleichung an. Was erhalten Sie? Zusatz: Warum gilt diese Gleichung?

(e) Zeigen Sie $E[e^{tX}] = \prod_{i=1}^{n}(1 + p_i(e^t - 1))$ und von da aus $E[e^{tX}] \leq e^{\mu(e^t-1)}$ mit Hilfe von $1 + x \leq e^x$. (Die Idee ist, die Exponentialfunktion zu nutzen, um zwischen Summen und Produkten nach Bedarf zu wechseln.)

(f) Setzen Sie dies in die vorherige Markov-Abschätzung ein. Zusammen mit dem passend gewählten $t = \ln(1 + \delta)$ sollte dies die gewünschte Chernoff-Grenze ergeben.

(g) Vergleichen Sie die naive Abschätzung mit dieser Chernoff-Grenze.

(h) Zeigen Sie für $\delta > 2e-1$ die einfachere Abschätzung $\Pr(X > (1+\delta)\mu) < 2^{-(1+\delta)\mu}$.

Aufgabe 2.

(MAX-SAT über randomisiertes Runden) Sei C_j eine Klausel mit $k \geq 1$ Literalen, $\hat{x} \in [0,1]^n$ und $\hat{z} \in [0,1]^m$ die Lösung des relaxierten Linearen Programms, und $x^* \in \{0,1\}^n$ eine gerundete Belegung mit $\Pr(x_i^* = 1) = \hat{x}_i$. Ohne Einschränkung sei $C_j = x_1 \vee \cdots \vee x_k$. Wir wollen zeigen, dass die Klausel mindestens mit Wahrscheinlichkeit $\Pr(C_j(x^*) = 1) \geq \beta_k \hat{z}_j$ erfüllt wird. Dabei sei $\beta_k = 1 - (1 - 1/k)^k$ und es gilt $\hat{z}_j < \hat{x}_1 + \cdots + \hat{x}_k$.

(a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit $\Pr(C_j(x^*) = 0)$, die Klausel nicht zu erfüllen? Um diese nach oben abzuschätzen, wird $\hat{x}_i = \hat{z}_j/k$ eingesetzt (weil dies die kleinstmöglichen Werte sind, bei denen die Nebenbedingung noch erfüllt ist). Zeigen Sie damit $\Pr(C_j(x^*) = 1) \geq 1 - (1 - \hat{z}_j/k)^k$.

Betrachten wir nun die Funktion $f(t) = 1 - (1 - t/k)^k$, so wissen wir $\Pr(C_j(x^*) = 1) \geq f(\hat{z}_j)$. Diese wollen wir zur weiteren Vereinfachung durch eine lineare Funktion $g(t)$ im Bereich $t \in [0, 1]$ ersetzen.

(a) Bestimmen Sie die lineare Funktion $g(t)$ zwischen $t = 0$ und $t = 1$.

(b) Zeigen Sie: $\forall t \in [0, 1]$ gilt $f(t) \geq g(t)$. Tipp: Zeigen Sie, dass $f(t)$ konkav ist.

(c) Zeigen Sie damit abschließend $\Pr(C_j(x^*) = 1) \geq \beta_k \hat{z}_j$.