

# Randomisierte Algorithmen

Prof. Dr. Klaus Meer, Ameen Naif

Aufgabenblatt 2  
Version 11.05.2016

---

## Aufgabe 1.

Sei  $A$  ein  $MC$ -Algorithmus, der für jedes  $x$  das richtige Resultat  $F(x)$  mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2} + \varepsilon_x$  berechnet, wobei  $\varepsilon_x$  von  $|x|$  abhängt. Sei  $\delta$  eine beliebige Konstante,  $0 < \delta < 1/2$ . Wie viele Wiederholungen  $k = k(|x|)$  von  $A$  sind notwendig, um  $\Pr(Ak(x) = F(x)) > 1 - \delta$  zu erreichen, wenn

(a)  $\varepsilon_x = \frac{1}{2^{|x|}}$

(b)  $\varepsilon_x = \frac{1}{|x|}$

(c)  $\varepsilon_x = \frac{1}{\log |x|}$

Was bemerken Sie bei a,b und c?

## Aufgabe 2.

Die *Geometrische Verteilung* beschreibt, wie oft ein Zufallsexperiment durchgeführt werden muss, bis das gewünschte Ergebnis zum ersten Mal auftritt. Dabei setzt man voraus, dass die Wahrscheinlichkeit, bei der nächsten Durchführung des Experiments erfolgreich zu sein, unabhängig von den vorher getätigten Versuchen ist. Dies kann ausgenutzt werden, um den Erwartungswert der notwendigen Versuche zu berechnen. Dabei entsteht eine einfach zu lösende rekursive Gleichung.

- (a) Sei nun  $\Pr(\text{Erfolg}) = p$  und  $X$  die Anzahl der notwendigen Versuche bis zum ersten Erfolg. Berechnen Sie den Erwartungswert  $E[X]$ .
- (b) Zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeiten  $\Pr(\text{Erfolg nach genau } n \text{ Versuchen})$  für verschiedene  $p$  auf. Wo liegt jeweils der Erwartungswert?

## Aufgabe 3.

Sei  $A$  ein Las-Vegas Algorithmus mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $P(A(x) \neq "?") \geq 0.5$  und erwarteter Laufzeit  $E[\text{Time}_A(x)]$  für Eingaben  $x$ . Der Algorithmus  $B$  soll  $A(x)$  solange in unabhängigen Läufen wiederholen, bis ein Ergebnis berechnet wurde (d.h. er gibt nie "?" zurück).

Nun wie hoch ist die erwartete Anzahl der versuchten Läufe von  $A(x)$ ? Wie ist die erwartete Laufzeit  $E[\text{Time}_B(x)]$  von  $B$ ?

## Aufgabe 4.

Sei  $A$  ein Las-Vegas Algorithmus, der immer korrekt stoppt und für Eingaben  $x$  die erwartete Laufzeit  $E[\text{Time}_A(x)]$  hat. Dieser wird in einen Algorithmus  $B$  eingebaut, der  $A(x)$  simuliert und dessen Ergebnis ausgibt, jedoch nach  $2E[\text{Time}_A(x)]$  Schritten abbricht und dann "?" ausgibt. Beweisen Sie, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit  $\Pr(B(x) \neq "?") \geq 0.5$  ist.