

Randomisierte Algorithmen

Prof. Dr. Klaus Meer, Ameen Naif

Aufgabenblatt 1
Version 13.04.2016

Aufgabe 1.

Grundlagen der diskreten Wahrscheinlichkeitsrechnung: Sammeln Sie Material zu den Begriffen Zufallsvariable, (diskrete) Wahrscheinlichkeitsverteilung und deren Axiome, uniforme Verteilung, Normalverteilung, unabhängige Ereignisse, bedingte Wahrscheinlichkeit, Satz von Bayes, Erwartungswert, Varianz, Verteilungsfunktion.

Aufgabe 2.

Sei $H(n) := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ die sog. n-te Harmonische Zahl. Zeigen Sie, dass $H(n) = \ln(n) + \Theta(1)$. Hinweis: Dazu kann $H(n)$ einmal als Riemann-Obersumme und einmal als Untersumme zum Integral $\int_1^n \frac{1}{x} dx$ gedeutet werden.

Aufgabe 3.

(nach J.v.Neumann)

- Gegeben sei eine Münze, für welche die Wahrscheinlichkeit p KOPF zu werfen *unbekannt* ist. Wie kann diese Münze verwendet werden, um gleichverteilte, faire Würfe ($\Pr(\text{KOPF}) = \Pr(\text{ZAHL}) = 0.5$) zu erhalten? Geben Sie ein Schema an, für das die erwartete Anzahl von Würfeln, um einen fairen Wurf zu erhalten, maximal $1/[p(1-p)]$ ist. Hinweis: Betrachten Sie zwei aufeinanderfolgende Würfe der unfairen Münze.
- Entwerfen Sie eine Erweiterung, welche die größtmögliche Menge unabhängiger, gleichverteilter Würfe aus gegebenen Würfeln der unfairen Münze extrahiert.

Aufgabe 4.

(nach D.E.Knuth und A.C-C.Yao)

- Angenommen Sie haben eine Quelle für gleichverteilte, zufällige Bits. Wie würden Sie diese benutzen, um gleichverteilte Stichproben aus der Menge $S = \{0, \dots, n-1\}$ zu ziehen? Bestimmen Sie die erwartete Anzahl Zufallsbits, die von Ihrem Algorithmus verwendet werden.
- Wie ist *worst-case* Anzahl benötigter Bits für Ihren Algorithmus? Betrachten Sie den Fall, wenn n eine Zweierpotenz ist und auch den Fall, wenn sie keine ist.
- Lösen Sie die vorherigen Fragen unter der Annahme, dass Ihnen eine Zufallsquelle mit gleichverteilten Werten aus $\{0, \dots, p-1\}$ zur Verfügung steht. Betrachten Sie dann den Fall, wenn n eine Potenz von p ist und wenn nicht.