Strukturelle Komplexitätstheorie

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1
Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0,1\}^*$)

1. $(A \leq_m^{\text{poly}} B) \implies (A \leq_m B)$
2. $(A \leq_m^{\text{poly}} B \wedge B \in \text{P}) \implies A \in \text{P}$
3. $(A \leq_m^{\text{poly}} B \wedge A \notin \text{NP}) \implies B \notin \text{NP}$.
4. ($A \in \text{P}$ entscheidbar, $B \neq \emptyset$, $B \neq \{0,1\}^*$, dann ist $A \leq_m^{\text{poly}} B$.
5. (A NP-vollständig $\wedge\, A \in \text{P}) \implies (\text{P} = \text{NP})$.

Aufgabe 2
Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0,1\}^*$, vollständig jeweils bezüglich $\leq_m^{\text{poly}}$)

1. (A NP-vollständig und $A \leq_m^{\text{poly}} B$ und $B \in \text{NP} \implies B$ NP-vollständig.
2. Keine nichtentscheidbare Sprache ist NP-vollständig.
3. Jede nicht-triviale Sprache in P ist P-vollständig.

Aufgabe 3
Welche der Eigenschaften "reflexiv", "symmetrisch", "antisymmetrisch", "transitiv" haben die Relationen $\leq_m^{\text{poly}}$ bzw. $\equiv_m^{\text{poly}}$ auf der Menge aller Sprachen über dem Alphabet $\{0,1\}^*$? Beweisen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 4
Wir betrachten die folgenden Sprachen L_1 und L_2 ($\text{bin}(n)$ bezeichnet die Binärdarstellung von n, niederwertigste Bits hinten, ohne führende Nullen)::

$$\begin{aligned} L_1 := \{\text{bin}(n_0)c\ldots c\,\text{bin}(n_k) \mid\ & k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \\ & \forall i \in \{0,\ldots,k\} : n_i \in \mathbb{N} \ \text{ und} \\ & \exists J \subseteq \{1,\ldots,k\} : \sum_{i \in J} n_l = n_0 \ \} \\ L_2 := \{\text{bin}(n_0)c\ldots c\,\text{bin}(n_k) \mid\ & k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \\ & \forall i \in \{0,\ldots,k\} : n_i \in \mathbb{N} \quad \text{und} \\ & \exists J \subseteq \{0,\ldots,k\} : \sum_{i \in J} n_i = \sum_{i \in \{0,\ldots,k\} \setminus J} n_i \ \} \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie: $L_1 \in \text{NP}$ und $L_2 \in \text{NP}$.
2. Zeigen Sie: $L_1 \equiv_m^{\text{poly}} L_2$.

Bemerkung: Sowohl L_1 als auch L_2 sind NP-vollständig (vgl. in der Literatur: Knappsack, Partition).

Aufgabe 5
Zeigen Sie:

1. $A \leq_m^{\text{poly}} B \iff \overline{A} \leq_m^{\text{poly}} \overline{B}$.
2. $(A \in \text{NPC} \wedge \text{NP} \neq \text{co-NP}) \implies (\{1\} \cdot A \cup \{2\} \cdot \overline{A} \notin \text{NP} \cup \text{co-NP})$.

Aufgabe 6
Zeigen Sie, dass die Klassen P und NP unter Vereinigung, Schnittbildung, Konkatenation und inverserm Homomorphismus abgeschlossen sind.

Aufgabe 7
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0,1\}^*$):

1. co-P = P .
2. $A \leq_m^{\text{poly}} B \implies B \leq_m^{\text{poly}} A$.
3. $(L \in \mathrm{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\} \wedge L' \in \mathrm{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\}) \implies L \equiv_m^{\text{poly}} L'$.
4. Auf der Menge aller Sprachen über dem Alphabet Σ ist die Relation $\leq_m^{\text{poly}}$ antisymmetrisch.
5. $H := \{\langle u, v\rangle \mid u$ ist Code einer TM und $M_u(v)\downarrow\} \in \mathrm{P}$

Aufgabe 8
Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0,1\}^*$)

1. $(A \leq_m^{\text{poly}} B \wedge B \in \mathrm{NP}) \implies A \in \mathrm{NP}$.
2. $(A \leq_m^{\text{poly}} B \wedge A \notin \mathrm{P}) \implies B \notin \mathrm{P}$.
3. $A \leq_m^{\text{poly}} B \iff \overline{A} \leq_m^{\text{poly}} \overline{B}$.
4. Sind A und B NP-vollständig, so gilt $A \equiv_m^{\text{poly}} B$.
5. $(\mathrm{NPC} \cap \mathrm{P} \neq \emptyset) \implies (\mathrm{NP} = \mathrm{P})$.
6. $(\mathrm{P} = \mathrm{NP}) \implies (\mathrm{NPC} = \mathrm{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\})$.

Aufgabe 9
Zeichen Sie ein Venn-Diagramm mit den folgenden Sprachklasssen: CFL, P, NP, co-NP, REC und RE. Tragen Sie die Sprachen $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und H in dieses Venndiagramm ein.

Aufgabe 10
Zeigen Sie:

$$\mathrm{SAT} \leq_{\mathrm{p}} 3\mathrm{SAT}$$

Aufgabe 11
Durch Anwendung der Regeln von de Morgan sowie den Distributivitätsgesetzen kann man eine beliebige aussagenlogische Formel in eine äquivalente aussagenlogische Formel in konjunktivere Normalform umwandeln. Skizieren Sie ein deterministisches Programm für diese Umwandlung. Ist diese Umwandlung eine polynomiale Reduktion von SAT auf $\mathrm{SAT}_{\mathrm{KNF}}$? ($\mathrm{SAT}_{\mathrm{KNF}}$ ist die Menge der erfüllbaren aussagenlogischen Formeln in konjunktiver Normalform.)

Aufgabe 12
Zeigen Sie:

$$\mathrm{SAT}_{\mathrm{DNF}} \in \mathrm{P}$$

($\mathrm{SAT}_{\mathrm{DNF}}$ ist die Menge der erfüllbaren aussagenlogischen Formeln in disjunktiver Normalform.)

Aufgabe 13
Sei $L := \{u\$v\$^t \mid u \in \{0,1\}^*$ ist Code einer Turingmaschine, $v \in \{0,1\}^*$ ein Input für T_u, $t \in \mathbb{N}$ und T_u angesetzt auf Input v stoppt akzeptierend in weniger als t Schritten$\}$.

Zeigen Sie, dass L NP-vollständig ist.

Beachten Sie, dass nicht alle Turing-Maschinen das Eingabe-Alphabet $\{0,1\}$ haben.

Aufgabe 14
Zeigen Sie, dass 2SAT in P liegt. (Recherchieren sie hierzu unter "Resolutionsverfahren") Wieso zeigt dieses Verfahren nicht auch, dass 3SAT in P liegt?