Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 9

Abgabetermin: 11.01.2016

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen, Vornamen, und Ihre Übungsgruppe an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 16, 17, 18, 19 und 20

Aufgabe 1
Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Sei
$$\begin{aligned} L &:= \{w_1\#w_2\#w_3\cdots\#w_k\# \mid k\in\mathbb{N} \text{ gerade}, w_1\in\{a,b\}^+, \forall i\in\{1,\ldots,k-1\} : w_i = \overleftarrow{w_{i+1}}\} \\ &= \{(w\#\overleftarrow{w}\#)^n \mid n\in\mathbb{N}, w\in\{a,b\}^+\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

1. L ist nicht kontextfrei,
2. L ist Schnitt zweier kontextfreier Sprachen L_1 und L_2,
3. Das Komplement von L ist eine kontextfreie Sprache.
   Hinweis: Geben Sie einen erkennenden NPDA an

Aufgabe 4
.Beweisen Sie die folgende Aussage:
$$\text{REG} \subset \text{CFL} \subset \text{CSL}$$
Denken Sie daran, Zeugensprachen für die Echtheit der Inklusion anzugeben!

Aufgabe 5
Sei Σ ein Alphabet, L eine kontextfreie Sprache über Σ, R eine reguläre Sprache über Σ und h ein Homomorphismus von Σ^* nach Σ^*. Zeigen Sie:

1. $L \cap R$ ist kontextfrei,
2. $h(L)$ ist kontextfrei,
3. $h^{-1}(L)$ ist kontextfre

Aufgabe 6
Sei:
$$\begin{aligned} L_1 &:= \{a,d\}^* \cdot \{b,d\}^* \cdot \{c,d\}^* \\ L_2 &:= \{w \in L_1 \mid \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\} \\ L_3 &:= \{xyz \in L_1 \mid x,z \in \{a,b,c,d\}^* \wedge y \in \{ab, bc\}\} \\ L_4 &:= L_2 \cup L_3 \end{aligned}$$
Welche der Sprachen $L_1,\ldots,L_4$ besitzen die kontextfreie Pumping-Eigenschaft? Welche der Sprachen $L_1,\ldots,L_4$ sind kontextfrei?
Hinweis: Welche Rolle spielen die Zeichen d in den Sprachen $L_1,\ldots,L_4$?

Aufgabe 7
Wir betrachten die *Dyck-Sprachen* $D_1 := L(G_1)$ und $D_2 := L(G_2)$, wo

$$\begin{array}{rcl} G_1 & = & (\{S\}, \{(,)\}, \{S \to SS, S \to \lambda, S \to (S)\}, S) \\ G_2 & = & (\{S\}, \{(,),[,]\}, \{S \to SS, S \to \lambda, S \to (S), S \to [S]\}, S) \end{array}$$

1. Beschreiben Sie D_1 und D_2 umgangssprachlich.
   Siehe auch: `http://en.wikipedia.org/wiki/Dyck_language` (englische Version!).
2. Geben Sie erkennende Kellerautomaten für D_1 und D_2 an.
3. Geben Sie Homomorphismen g, h und eine reguläre Sprache R an, so dass $D_1 = h^{-1}(D_2 \cap R)$.
4. Geben Sie Homomorphismen g und h sowie eine reguläre Sprache R an, so dass $\{wc\overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^*\} = h^{-1}(D_2 \cap R)$ ist.

Aufgabe 8
Sei $L_1 := \{a^n b^m c^k \mid n,m,k \in \mathbb{N}_0 \wedge (n = m)\}$, $L_2 := \{a^n b^m c^k \mid n,m,k \in \mathbb{N}_0 \wedge (m = k)\}$ und $L_3 := \{a^n b^m c^k \mid n,m,k \in \mathbb{N}_0 \wedge (n \neq m \vee m \neq k)\}$. Zeigen Sie:

1. L_1, L_2, L_3 und $L_1 \cup L_2$ sind kontextfrei.
2. $L_1 \cap L_2$ ist nicht kontextfrei (Hinweis: Zeigen Sie, dass $L_1 \cap L_2$ nicht kontextfrei pumpbar ist.)
3. $\overline{L_1 \cap L_2} = (\{a,b,c\}^* \setminus L(a^*b^*c^*)) \cup L_3$.
4. $\overline{L_1 \cap L_2}$ ist kontextfrei.
5. Die kontextfreien Sprachen sind nicht abgeschlossen unter Schnitt und Komplementbildung.

Aufgabe 9
Zu $L \subseteq \Sigma^*$ definieren wir

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ANF}(L) & := & \{w \mid \exists v \in \Sigma^* \text{ mit } wv \in L\}, \\ \mathrm{END}(L) & := & \{w \mid \exists v \in \Sigma^* \text{ mit } vw \in L\}, \\ \mathrm{SUB}(L) & := & \{w \mid \exists v,u \in \Sigma^* \text{ mit } vwu \in L\}. \end{array}$$

1. Geben Sie ANF(L), END(L) und SUB(L) für folgende Sprachen L_i an ($i = 1,2,3$):

   $$L_1 := \{ab, aababb, \lambda\}, \quad L_2 := \{a^n b^n \mid n \in N\}, \quad L_3 := \{w\overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}.$$

2. Sei $M = (\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \{a,b,c\}, \delta, \{1\}, \{5,6\})$ ein nichtdeterministischer finiter Automaten, mit δ gegeben durch:

δ	1	2	3	4	5	6	7	8
a	$\{2\}$	$\{5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
b	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
c	$\emptyset$	$\{6\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{7\}$	$\{7,8\}$	$\{8\}$

   Geben Sie nichtdeterministische Automaten an, die ANF($L(M)$), END($L(M)$) und SUB($L(M)$) erkennen.
3. Zeigen Sie: Wird L von einem finiten Automat erkannt, so auch ANF(L), END(L) und SUB(L).
4. Zeigen Sie: Wird L von einer kontextfreien Grammatik erzeugt, so auch ANF(L), END(L) und SUB(L).

Aufgabe 10
Sei $L := \{a^n b^n c^m \mid n,m \in \mathbb{N}_0 \wedge n \neq m\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

1. L hat nicht die reguläre Pumping-Eigenschaft.
2. L hat die kontextfreie Pumping-Eigenschaft.

Hinweis: L ist nicht kontextfrei. Dies kann mit Hilfe von Ogdens Lemma nachgewiesen werden, gute Studierende können den Beweis versuchen. Die Anwendung von Ogdens Lemma ist nicht wesentlich schwieriger als die Anwendung des Pumping Lemmas. (Zu Ogdens Lemma siehe `http://en.wikipedia.org/wiki/Ogden\%27s_lemma`, bzw. William Ogden: A Helpful Result for Proving Inherent Ambiguity, Mathematical Systems Theory, 2(3), pp. 191-194, 1968.

Aufgabe 11
Konstruieren Sie Turing-Maschinen, die die folgenden Bandinhalte in der angegebenen Weise verändern. Die Turing-Maschinen starten auf dem ersten Non-Blank-Zeichen, und sollen beim Stoppen wiederum auf diesem Feld stehen (Eingabealphabet ist $\{0, 1, a\}$, $n, m \in \mathbb{N}$).

1. $a^n 1 a^m$ nach $a^{n \dot{-} m}$, wobei $n \dot{-} m := \begin{cases} n - m & \text{falls } n \geq m, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
2. $a^n 1 a^m$ nach $a^{n \cdot m}$.
3. $a^n 1 a^m$ nach $a^{n//m}$, wobei $n//m$ die ganzahlige Division von n durch m bezeichnet.
4. $a^n 1 a^m$ nach $a^{n \bmod m}$.
5. a^n nach $\text{bin}\,(n)$, wobei $\text{bin}\,(n)$ die Binärdarstellung von n ist (niederwertige Bits hinten).
6. $\text{bin}\,(n)$ nach a^n.
7. $\text{bin}\,(n) \Box \text{bin}\,(m)$ nach $\text{bin}\,(n + m)$.
8. $\text{bin}\,(n) \Box \text{bin}\,(m)$ nach $\text{bin}\,(n \cdot m)$.
9. $\text{bin}\,(n)$ nach $\text{bin}\,(n^2)$ überführt.

Kommentieren Sie Ihre Programme!

Aufgabe 12
Geben Sie für folgende Sprachen jeweils entscheidende Turing-Maschinen an:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\} \\ L_2 &= \{w \in \{a, b\}^* \mid \ abbb \text{ ist nicht Teilwort von } w\} \\ L_3 &= \{wcw \mid w \in \{a, b\}^*\} \\ L_4 &= \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Kommentieren Sie Ihre Programme!

Aufgabe 13
Geben Sie eine entscheidende Turing-Maschine für $L(\alpha)$ an, wobei α der folgende reguläre Ausdruck ist.

$$\alpha = ((aba \cup bbb)^* \cdot (aaa \cup bbb)^* \cdot (ccc)^*)$$

Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise und Ihr Programm!

Aufgabe 14
Geben Sie eine Turing-Maschine M an, die $\text{bin}(n)$ nach $\text{hex}(n)$ überführt, wobei $\text{hex}(n)$ die Hexadezimaldarstellung von n ist (niederwertige Stellen hinten). Geben Sie einen Lauf von M auf dem Wort 11110100101 an. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise und Ihr Programm!

Aufgabe 15
Geben Sie Turing-Maschinen an, die aus einem Bandinhalt der Form $w_1 \Box w_2 \Box \cdots \Box w_k$ (beliebige Anzahl nichtleerer Worte, jeweils durch ein Blank ($\Box$) getrennt) die folgenden Bandinhalte erzeugen ($w_1, w_2, \ldots, w_k \in \{0, 1\}^+$):

1. $w_1 \Box w_2 \Box \cdots \Box w_k \Box w_1$.
2. $w_1 \Box w_2 \Box \cdots \Box w_{k-1} \Box w_k \Box w_1 \Box w_2 \Box \cdots \Box w_{k-1} \Box w_k$.
3. $w_1 \Box w_3 \Box w_5 \Box \cdots \Box w_n$ mit $n = \begin{cases} k - 1 & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ k & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$
4. $w_1 \Box w_2 \Box w_1 \Box w_3 \Box w_1 \Box w_4 \Box \cdots \Box w_{k-1} \Box w_1 \Box w_k$.

Kommentieren Sie Ihre Programme!

Aufgabe 16
Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeichnen Sie das Venn-Diagramm mit folgenden Sprachmengen:

$P(\Sigma^*)$	alle Sprachen über Σ
REG	reguläre Sprachen über Σ
CFL	kontextfreie Sprachen über Σ
$\mathcal{A}_3$	Sprachen über Σ mit regulärer Pumping Eigenschaft
$\mathcal{A}_2$	Sprachen über Σ mit kontextfreier Pumping Eigenschaft

Tragen Sie überall eine Sprache ein, die im jeweiligen Bereich liegt, begründen Sie Ihre Eintragungen.
Bemerkung: Sie dürfen alle Sprachen aus dem Übungsblatt verwenden.

Aufgabe 17
Sei $L := \{w \in \{a,b\}^* \mid bb \text{ ist Teilwort von } w, \text{ oder } \#_a(w) \text{ ist Primzahl, oder } \#_b(w) = 0\}$. Zeigen Sie, dass L die kontextfreie Pumping-eigenschaft hat, aber nicht kontextfrei ist.

Aufgabe 18
Sei Σ ein endliches Alphabet. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen..

1. Jede Sprache, die die kontextfreie Pumping-Eigenschaft hat ist kontextfrei.
2. Ist L $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei und h ein Worthomomorphismus von Σ^* nach Σ^*, so sind $h(L)$ und $h^{-1}(L)$ auch kontextfrei.
3. $\exists L \in \text{CFL} : \overline{L} \in \text{CFL}$
4. $\forall L \in \text{CFL} : \overline{L} \notin \text{CFL}$
5. Es gibt eine kontextfreie Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenz R_L einen unendlichen Index hat.
6. Es gibt eine kontextfreie Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenz R_L einen endlichen Index hat.
7. Es gibt eine kontextfreie, nicht-reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenz R_L einen endlichen Index hat.
8. Ist $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei und $L' \subseteq \Sigma^*$ nicht-regulär, so ist auch $L \cup L'$ nicht-regulär.
9. Sind $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei und $L' \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei, so ist auch $L \cup L'$ kontextfrei.

Aufgabe 19
Konstruieren Sie Turing-Maschinen, die die folgenden Bandinhalte in der angegebenen Weise verändern. Die Turing-Maschinen starten auf dem ersten Non-Blank-Zeichen, und sollen beim Stoppen wiederum auf diesem Feld stehen (Eingabealphabet ist $\{0,1,a\}$, $n,m \in \mathbb{N}$). Kommentieren Sie Ihre Programme!

1. $a^n 1 a^m$ nach $a^{n \cdot m}$.
2. $\text{bin}\,(n) \,\Box\, \text{bin}\,(m)$ nach $\text{bin}\,(n+m)$.

Aufgabe 20
Geben Sie eine entscheidende Turing-Maschine (mit Kommentierung) für die folgende Sprache an:

$$L := \{wcwca^n \mid w \in \{a,b\}^* \wedge n \in \mathbb{N} \wedge 3 \cdot |w| = n\}$$

E schéine Krëschtdag an e glécklecht neit Joer!

Vrolijk Kerstmis en een een Gelukkig Nieuwjaar!

God Jul och Gott Nytt Å r!

Joyeux Noël et une Bonne Nouvelle Année!

Frohe Weihnachten und einen Guten Rutsch ins Neue Jahr!
