Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 7

Abgabetermin: 14.12.2015

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen, Vornamen, und Ihre Übungsgruppe an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 13, 14, 15, 16 und 17

Aufgabe 1

Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Recherchieren Sie die Begriffe *endlich*, *abzählbar*, *abzählbar unendlich* und *überabzählbar.*
2. Die Klasse der kontextfreie Sprachen über $\{0,1\}^*$ ist endlich.
3. Die Klasse der kontextfreie Sprachen über $\{0,1\}^*$ ist abzählbar unendlich.
4. Die Klasse der kontextfreie Sprachen über $\{0,1\}^*$ ist überabzählbar unendlich.
5. Es gibt Sprachen über $\{0,1\}^*$, die nicht-kontextfreie sind.

Aufgabe 4

Sei $G = (\{S\}, \{a\}, \{S \to SS, S \to a\}, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Bestimmen Sie die von G erzeugte Sprache $L(G)$. Geben Sie alle Ableitungsbäume bezüglich G für das Wort $w = a^5$ an. Gibt es eine Grammatik G' für $L(G)$, so dass jedes Wort in $L(G)$ nur einen Ableitungsbaum bezüglich G' hat? Ist $L(G)$ inhärent mehrdeutig?

Definition: Eine kontextfreie Grammatik G heißt *mehrdeutig* genau dann, wenn es ein Wort w in $L(G)$ gibt, das mindestens zwei unterschiedliche Ableitungtungsbäume hat. Eine kontextfreie Sprache L heißt *inhärent mehrdeutig* genau dann, wenn jede L erzeugende kontextfreie Grammatik G (also mit $L(G) = L$) mehrdeutig ist.

Aufgabe 5

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Wir betrachten die folgenden Sprachen über Σ.

$$\emptyset,\ \{\lambda\},\ \emptyset^*,\ \{\lambda\}^*,\ \{a,b,c\}^*,\ \{a,b\}^+,\ \{a,b,c\},\ \{abc\},\ \{a,b,c\}^3$$

Geben Sie für jede dieser Sprachen einen erkennenden (nicht-deterministischen) Kellerautomat an.

Aufgabe 6

Geben Sie jeweils allgemeine Grammatiken an, die die Sprachen L_i erzeugen:

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \\
L_2 &:= \{a^{n^2} b a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\
L_3 &:= \{\mathrm{bin}(n) \cdot a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\
L_4 &:= \{\mathrm{bin}(n)\$\,\mathrm{bin}(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\} \\
L_5 &:= \{\mathrm{bin}(n)\$\,\mathrm{bin}(m)\$\{\mathrm{bin}(n+m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

Notation: Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet $\text{bin}(n)$ die Binärdarstellung von n, ohne führende Nullen, mit der niederwertigsten Ziffer hinten.

Aufgabe 7
Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik und $S' \notin N$ ein neues Nonterminal. Welche Sprache wird dann durch $G' = (N \cup \{S'\}\,,\, T\,,\, P \cup \{S' \to S, S' \to S'S'\}\,,\, S')$ erzeugt?

Aufgabe 8
Seien $G_1 = (N_1, T, P_1, S_1)$ und $G_2 = (N_2, T, P_2, S_2)$ kontextfreie Grammatiken mit $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ und $(N_1 \cup N_2) \cap T = \emptyset$,und $S' \notin N$ ein neues Nonterminal. Welche Sprache wird dann durch $G' = (N_1 \cup N_2 \cup \{S'\}\,,\, T\,,\, P_1 \cup P_2 \cup \{S' \to S_1, S' \to S_2\}\,,\, S')$ erzeugt?

Aufgabe 9
Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik mit $N = \{S\}$, $T = \{(,), \emptyset, a, b, c, \cdot, \cup, ^*\}$ und

$$P = \{S \to (\emptyset), S \to (a), S \to (b), S \to (c), S \to (S \cdot S), S \to (S \cup S), S \to (S)^*\}.$$

Welche Sprache wird von der Grammatik G erzeugt?

Aufgabe 10
Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie erkennende (nicht-deterministische) Kellerautomaten sowie erzeugende kontextfreie Grammaitiken für folgende Sprachen L_i an:

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{w \in \{a,b,c\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\} \\
L_2 &:= \{w \in \{a,b,c\}^* \mid aba \text{ oder } bab \text{ ist Teilwort } w\} \\
L_3 &:= L_1 \cup L_2 \\
L_4 &:= L_1 \cap L_2 \\
L_5 &:= L_1 \cdot L_2
\end{aligned}$$

Aufgabe 11
Sei $P = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ ein nichtdeterministischer Kellerautomat (NPDA). Sei $\perp$ ein neues Zeichen, dass weder in Σ noch in Γ ist. Wir definieren:

$$\begin{aligned}
L(P) &:= \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F \ \text{ mit } (q_0, w, \lambda) \vdash_P^* (p, \lambda, \lambda)\} \\
L_\lambda(P) &:= \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in K \ \text{ mit } (q_0, w, \lambda) \vdash_P^+ (p, \lambda, \lambda)\} \\
L_f(P) &:= \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F\, \exists \alpha \in \Gamma^* \ \text{ mit } (q_0, w, \lambda) \vdash_P^* (p, \lambda, \alpha)\} \\
L_\perp(P) &= \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F \text{ mit } (q_0, w, \perp) \vdash_P^* (p, \lambda, \lambda)\}
\end{aligned}$$

1. Gilt für jeden NPDA P, dass $L(P) = L_f(P)$ ist? (Begründung!)
2. Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie:
   Es gibt ein NPDA P mit $L(P) = L \iff$ es gibt ein NPDA P mit $L_f(P) = L$.
3. Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie:
   Es gibt ein NPDA P mit $L(P) = L \iff$ es gibt ein NPDA P mit $L_\perp(P) = L$.
4. Gilt für jeden NPDA P, dass $L(P) = L_\lambda(P)$ ist? (Begründung!)
5. Zeigen Sie: Für jeden NPDA P gilt: $\lambda \in L_\lambda(P)$
6. Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Gilt die folgende Aussage: Es gibt ein NPDA P mit $L(P) = L \iff$ es gibt ein NPDA P mit $L_\lambda(P) = L$.

Aufgabe 12
Konstruieren Sie zur kontextfreien Grammatik $G = (\{S, A, B, C\}\,,\, \{a, b, c, d\}\,,\, P\,,\, S)$ einen Pushdown-Automaten, wobei $P := \{S \to dSd, S \to dAd, A \to BC, B \to bb, C \to aCa, C \to cc\}$. Wenden Sie das in der Vorlesung vorgestellten Verfahren (Top-Down) an.
Sei $w := ddbbaaaccaaadd$. Geben Sie einen Ableitungsbaum B für w an. Geben Sie für den konstruierten Pushdown-Automaten einen dem Ableitungsbaum B entsprechenden Lauf auf dem Wort w an. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 13
Beweisen Sie, dass die Klasse der kontextfreien Sprachen unter Vereinigung, Konkatenation und Iteration (*-Bildung) abgeschlossen sind.

Aufgabe 14
Wir betrachten die Trägermenge A und binäre Relationen R und S auf A (also $R, S \subseteq A \times A$). Wir definieren die Verknüpfung $\circ$ auf Menge der binären Relationen auf A vermöge $R \circ S := \{(x, y) \mid \exists z \in A : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S\}$. Weiterhin definieren wir $R^0 := \mathrm{id}_A$ sowie $R^{i+1} := R^i \circ R$ für $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Schließlich $R^* := \cup_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} R^i$. Zeigen Sie:

1. Die Verknüpfung $\circ$ ist assoziativ auf der Menge der binären Relationen über A.
   [Zusatzfrage: Ist dies von Bedeutung im Hinblick auf die Definition von R^i?]
2. R^* ist reflexiv und transitiv.
3. R^* ist die kleinste reflexiv-transitive Relation, die R umfasst.
4. Ist $\mathcal{R}$ die Menge aller reflexiv-transitive Relationen, die R umfassen, so gilt: $R^* = \cap_{S \in \mathcal{R}} S$.

Aufgabe 15
Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Auf N ist die Relation $\backsim$ definiert vermöge

$$X \backsim Y \;:\Longleftrightarrow\; X \xrightarrow{*} Y \wedge Y \xrightarrow{*} X.$$

sowie auf $N/\backsim$ die Relation $\rightsquigarrow$ vermöge

$$A \rightsquigarrow B \;:\Longleftrightarrow\; \exists X \in A, \exists Y \in B \text{ mit } (X, Y) \in P.$$

Zeigen Sie, dass $\backsim$ eine Äquivalenzrelation und $\rightsquigarrow^*$ eine Ordnungsrelation ist. ($\rightsquigarrow^*$ ist die reflexiv transitive Hülle von $\rightsquigarrow$.)

Aufgabe 16
Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie erkennende Kellerautomaten sowie erzeugende kontextfreie Grammaitiken für folgende Sprachen L_i an:

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{wv \mid v \in \{c\}^+,\ w \in \{a, b\}^*,\ |w| = |v|\} \\ L_2 &:= \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\ ,\ i < j\} \\ L_3 &:= L_1 \cdot L_2 \end{aligned}$$

Aufgabe 17
Konstruieren Sie zur kontextfreien Grammatik $G := (\{S, A, B, C\}\,,\ \{a, b, c, d\}\,,\ P\,,\ S)$ Pushdown-Automaten nach dem in der Vorlesung beschriebenen Verfahren, wobei
$P := \{S \to AbS, S \to CAB, A \to cA, A \to a, B \to CBb, B \to b, C \to dd\}$.
Sei $w := ccabddcaddddbbb$. Geben Sie einen Ableitungsbaum B für w an. Geben Sie für den konstruierten Pushdown-Automaten jeweils einen dem Ableitungsbaum B entsprechenden Lauf auf dem Wort w an. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise!