Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 6

Abgabetermin: 07.12.2015

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen, Vornamen, und Ihre Übungsgruppe an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 14, 15 und 16

Aufgabe 1

Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

Sei f eine totale monotone Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \exists i \in \mathbb{N} \ : \ f(i+1) > f(i) + k$$

Sei weiterhin $L := \{a^{f(i)} \mid i \in \mathbb{N}\}$.

1. Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass L nicht regulär ist.
2. Bestimmen Sie die Kongruenzklassen von L.
   Hinweis: Siehe auch Aufgabe 19 von Blatt 4.

Aufgabe 4

Beweisen Sie mit Hilfe von endlichen Automaten, dass die regulären Sprachen unter Homomorphismus und inversem Homomorphismus abgeschlossen sind. Verwenden Sie im Beweis weder reguläre Ausdrücke noch Grammatiken.

Hinweis: Sei h ein Homomorphismus. Angenommen, L werde vom deterministischen endlichen Automaten M erkannt. Wir erhalten einen endlichen Automaten für $h(L)$, wenn vom Zustand p mit dem Zeichen a in den Zustand q übergegangen wird, der beim Automaten M von p aus mit $h(a)$ erreicht wird. Umgekehrt erhalten wir einen endlichen Automaten für $h^{-1}(L)$, wenn es von p aus einen Pfad für $h(a)$ nach q gibt, falls von p mit a nach q übergegangen wird.

Definition: $h(L) := \{h(x) \mid x \in L\}$, $h^{-1}(L) := \{x \mid h(x) \in L\}$

Aufgabe 5
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$, sowie h und g Homomorphismen von Σ^* nach Σ^* mit: $h(a) = ab$ $g(a) = a$
$h(b) = ba$ $g(b) = c$
$h(c) = ccc$ $g(c) = \lambda$

1. Geben Sie $h(L)$, $g(L)$, $h^{-1}(L)$ und $g^{-1}(L)$ für folgende Sprachen L_i an $(i = 1, 2, 3)$:

$$L_1 := \{acccaa, ababba, \lambda\}, \quad L_2 := \{a^n b^n | \, n \in N\}, \quad L_3 := \{wccc\overleftarrow{w} | \, w \in \{a, b\}^*\}.$$

2. Sei $M = (\{1, 2, 5, 6, 7, 8\}, \{a, b, c\}, \delta, \{1\}, \{5, 6\})$ ein nichtdeterministischer endlicher Automaten, mit δ gegeben durch:

δ	1	2	5	6	7	8
a	$2,5$	5	–	–	–	7
b	–	2	2	–	–	–
c	–	6	–	7	$7,8$	8

Konstruieren Sie NFAs die $h(L(M))$, $g(L(M))$, $h^{-1}(L(M))$ und $g^{-1}(L(M))$ erkennen.

Aufgabe 6
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ L und R reguläre Sprachen über Σ sowie h und g Homomorphismen von Σ^* nach Σ^*. Zeigen Sie, dass dann auch $g\left(h^{-1}(L) \cap R\right)$ regulär ist. [Sie dürfen selbstverständlich die in der Vorlesung gezeigten Sätze benutzen.]

Aufgabe 7
Wir betrachten die Sprachen L_2, L_3 und L_4 sowie die Sprachen: L'_2, L'_3 und L'_4:

$$\begin{array}{lcl}
L_2 & := & \{w \in \{a,b,c\}^* \mid aa, ab, ba \text{ oder } bb \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } w \text{ enthält genau so viele } a\text{'s wie } b\text{'s}\} \\
L'_2 & := & \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\
L_3 & = & \{w \in \{a,b\}^* \mid aa \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } bb \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } |w| \text{ ist eine Quadratzahl}\} \\
L'_3 & := & \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \land n \text{ ist eine Quadratzahl}\} \\
L_4 & = & L((a+b)^* \cdot (aa+bb) \cdot (a+b)^*) \cup \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist Primzahl}\} \\
L'_4 & := & \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \land n \text{ ist Primzahl}\}
\end{array}$$

1. Geben Sie Homomorhismen h_2, h_3 und h_4, g_2, g_3 und g_4 sowie reguläre Sprachen R_2, R_3 und R_4 an, so dass $L'_i = g_i\left(h_i^{-1}(L_i) \cap R_i\right)$ gilt für $i = 2, 3, 4$.
2. Zeigen Sie (mit Hilfe der vorhergehenden Aufgabe), dass die Sprachen L_2, L_3 und L_4 nicht regulär sind.
3. (Wiederholung) Zeigen Sie, dass die Sprachen L_2, L_3 und L_4 die reguläre Pumpingeigenschaft haben.

Aufgabe 8
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Geben Sie Grammatiken für folgende Sprachen über Σ an

$$\emptyset,\ \{\lambda\},\ \emptyset^*,\ \{\lambda\}^*,\ \{a,b,c\}^*,\ \{a,b\}^+,\ \{a,b,c\},\ \{abc\},\ \{a,b,c\}^3$$

Aufgabe 9
Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie kontextfreie Grammatiken für folgende Sprachen L_i an:

$$\begin{array}{l}
L_1 := \{a^{2n} c b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\
L_2 := \{w \in \{a,b,c\}^* \mid aba \text{ oder } bab \text{ ist Teilwort } w\} \\
L_3 := \{wv \mid v \in \{c\}^*,\ w \in \{a,b\}^*,\ |w| = |v|\} \\
L_4 := \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\ ,\ i < j\} \\
L_5 := L_1 \cup L_2 \\
L_6 := L_3 \cdot L_4
\end{array}$$

Aufgabe 10
Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie kontextfreie Grammatiken für folgende Sprachen L_i an:

$$L_1 := \{a^{2n}cb^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$L_2 := \{w \in \{a,b,c\}^* \mid aba \text{ oder } bab \text{ ist Teilwort } w\}$$
$$L_3 := \{wv \mid w \in \{c\}^*,\, v \in \{a,b\}^*,\, |w| = |v|\}$$
$$L_4 := \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\ ,\ i < j\}$$

Aufgabe 11
Geben Sie jeweils rechtslineare Grammatiken an, die die Sprachen L_i erzeugen:

$$L_1 \ := \ \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } abaab \text{ nicht}\}$$
$$L_2 \ := \ \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = 3\}$$
$$L_3 \ := \ \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 3 = 0 \vee \#_a(w) \bmod 3 = 2\}$$

Aufgabe 12
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gibt eine kontextfreie Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft nicht hat.
2. Jede kontextfreie Sprache hat die reguläre Pumping-Eigenschaft.
3. Es gibt eine kontextfreie Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft hat.
4. Es gibt eine kontextfreie nicht-reguläre Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft hat.

Aufgabe 13 (für gute Studierende)
Wir betrachten eine beliebige nicht-reguläre Sprache L über dem einelementigen Alphabet $\Sigma = \{a\}$. Es gilt also $L \subseteq \{a\}^*$. Zeigen Sie, dass dann L^* trotzdem regulär ist.

Aufgabe 14
Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie kontextfreie Grammatiken für folgende Sprachen L_i an:

$$L_1 := \{w \in \{a,b,c\}^* \mid \text{Weder } abba \text{ noch } baab \text{ ist Teilwort von } w\}$$
$$L_2 := \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\ ,\ i \neq j\}$$
$$L_3 := \{wcvc\overleftarrow{w} \mid w, v \in \{a,b\}^+\}$$
$$L_4 := \{a^{n+m} b^m c^n \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

Aufgabe 15
Geben Sie jeweils rechtslineare Grammatiken an, die die Sprachen L_i erzeugen:

$$L_1 \ := \ \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } abaab \text{ nicht}\}$$
$$L_2 \ := \ \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \geq 3\}$$
$$L_3 \ := \ \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 3 = 1 \vee \#_b(w) \bmod 3 = 2\}$$
$$L_4 \ := \ \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 3 = 1 \wedge \#_b(w) \bmod 3 = 2\}$$

Aufgabe 16
Sei $\Sigma = \{a, b\}$, L und R Sprachen über Σ und $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ein Homomorphismus. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $h(L \cap R) = h(L) \cap h(R)$
2. $h^{-1}(L \cap R) = h^{-1}(L) \cap h^{-1}(R)$
3. $h(L \cup R) = h(L) \cup h(R)$
4. $h^{-1}(L \cup R) = h^{-1}(L) \cup h^{-1}(R)$
5. $L = h^{-1}(h(L))$
6. $L = h(h^{-1}(L))$
