Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 5

Abgabetermin: 23.11.2015

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen, Vornamen, und Ihre Übungsgruppe an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 12,13,14 und 15

Aufgabe 1
Bereiten Sie die Zwischenklausur vom 20.11.2015 gewissenhaft vor. Lernen Sie also die Definitionen so, dass Sie die Definitionen aufschreiben können. Es sind keine Hilfsmittel (Skripte, Bücher, Aufzeichnungen, Spickzettel, Handys, Taschenrechner, programmierbare Armbanduhren, etc.) in der Klausur erlaubt, nur weißes Papier und Kugelschreiber (und das ist selber mitzubringen!). Sie dürfen weder Jacken, Mäntel noch Taschen an Ihren Platz mitnehmen. Es werden Ihnen Plätze zugeordnet. Bitte bringen Sie einen Lichtbildausweis und Ihren Studentenausweis zur Klausur mit.
Schreiben Sie bitte mit Kugelschreiber und nicht mit Bleistift. Beginnen Sie in der Klausur jede Aufgabe auf einer neuen Seite und heften die Blätter am Ende in der Reihenfolge der Aufgaben ab. Wir werden Hefter mitbringen.

Aufgabe 2
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 3
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 4
Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man bei Eingabe eines deterministischen finiten Automaten A feststellt, ob das Komplement der erkannten Sprachen $L(A)$ unendlich ist.

Aufgabe 5
Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man bei Eingabe zweier nichtdeterministischer finiter Automaten A_1 und A_2 feststellt, ob die erkannten Sprachen $L(A_1)$ und $L(A_2)$ gleich sind.

Aufgabe 6
Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man zu einem regulären Ausdruck α über einem Alphabet Σ einen regulären Ausdruck für $\overline{\mathcal{L}(\alpha)} = \Sigma^* \setminus \mathcal{L}(\alpha)$ erzeugen kann.

Aufgabe 7
Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man bei Eingabe eines nichtdeterministischer finiten Automaten A feststellt, ob die erkannte Sprachen $L(A)$ leer, endlich oder unendlich ist.

Aufgabe 8
Sei Σ ein endliches Alphabet und $i \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie jeweils die Mächtigkeit von Σ^i und $\Sigma^{<i}$. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 9
Sei $\Sigma = \{a, b\}$, L und R Sprachen über Σ und $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ein Homomorphismus (bezüglich der Konkatenation). Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $h(L \cap R) = h(L) \cap h(R)$
2. $h^{-1}(L \cap R) = h^{-1}(L) \cap h^{-1}(R)$
3. $h(L \cup R) = h(L) \cup h(R)$
4. $h^{-1}(L \cup R) = h^{-1}(L) \cup h^{-1}(R)$
5. $L = h^{-1}(h(L))$
6. $L = h(h^{-1}(L))$
7. $h(L \cdot R) = h(L) \cdot h(R)$
8. $h(L \cdot R) = h(L) \cup h(R)$

Hinweis: Außer bei den Teilaufgaben 7 und 8 wird die Homomorphieeigenschaft nicht gebraucht. Die Teilaufgaben benötigen nur, dass h eine totale Funktion ist.

Aufgabe 10
Seien $M' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ und $M'' = (Q'', \Sigma, \delta'', q''_0, F'')$ zwei NFA mit $Q' \cap Q'' = \emptyset$. Wir konstruieren den NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q'_0, F)$ mit $Q = Q' \cup Q'' \setminus \{q''_0\}$, $\delta = \delta' \cup \{(f(q), a, f(p)) \mid (q, a, p) \in \delta''\}$, $F = F' \cup \{f(q) \mid q \in F''\}$, wobei

$$f : Q'' \longrightarrow Q'' \setminus \{q''_0\} \cup \{q'_0\} \quad \text{mit} \quad f(q) = \begin{cases} q & \text{falls} \quad q \neq q''_0, \\ q'_0 & \text{falls} \quad q = q''_0 \end{cases}$$

(Die beiden Startzustände werden identifiziert.)
Erkennt im Allgemeinen M die Sprache $L(M') \cup L(M'')$?

Aufgabe 11
Seien M_1 und M_2 zwei NFA, und M der zugehörige Produktautomat, wobei ein Zustand des Produktautomaten akzeptierend ist, falls mindestens eine Komponente akzeptierend ist. Gilt $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$?
Testen Sie Ihre Antwort an den beiden folgenden Automaten $M_1 = (\{0, 1, 2, 3\}, \{a, b\}, 0, \delta_1, \{3\})$ und $M_2 = (\{0, 1, 2, 3\}, \{a, b\}, 0, \delta_2, \{3\})$, mit:

δ_1	a	b
0	0, 1	0
1	2	–
2	3	–
3	3	3

δ_2	a	b
0	–	1
1	2, 3	–
2	3	–
3	–	1

.

Wie müssen Sie die Konstruktion berichtigen, dass die Vereinigung erkannt wird.

Aufgabe 12
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $M = (Q, \Sigma, \delta, (0, 0), F)$ ein deterministischer endlicher Automat mit

$$Q = \{(i, j) \in \mathbb{N} \mid 0 \leq i \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq j \leq 2\} ,$$
$$\delta = \{(i, j), a, (i + 1 \bmod 2 \ , \ j \ )c^2 \times \Sigma \times \mathbb{N}^2 \ \mid \ i \leq 1 \ , \ j \leq 3 \ \}$$
$$\cup\{(i, j), b, (i \ , \ j + 1 \bmod 3 \ ) \in \mathbb{N}^2 \times \Sigma \times \mathbb{N}^2 \ \mid \ i \leq 1 \ , \ j \leq 3\}$$
$$\cup\{(i, j), c, (i \ , \ j - 1 \bmod 3 \ ) \in \mathbb{N}^2 \times \Sigma \times \mathbb{N}^2 \ \mid \ i \leq 1 \ , \ j \leq 3\} \text{ , und}$$
$$F = \{(0, 0)\}.$$

Welche der folgenden Wörtern $abc, aabcc, aa, aabcb, aababaaa$ werden von M akzeptiert? Beschreiben Sie die von M erkannte Sprache. Begründen sie Ihre Antwort.

Aufgabe 13
Zu einem NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ konstruieren wir den Automaten $M' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, \{q_0\})$ mit $\delta' = \delta \cup \{(p, \lambda, q_0) \mid p \in F\}$ (der Startzustand q_0 wird einziger Endzustand, von jedem alten Endzustand geht eine λ-Transition zum Startzustand). Gilt $L(M') = L(M)^*$ für jeden finiten Automaten M?

Aufgabe 14
Wir betrachten die Sprachen L_2, L_3 und L_4:

$$\begin{array}{lcl} L_2 & := & \{w \in \{a,b,c\}^* \mid \ w \text{ enthält weniger } a\text{'s als } b\text{'s}\} \\ L_3 & := & \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist eine Quadratzahl oder } |w| \text{ ist eine Kubikzahl}\} \\ L_4 & := & \{w \in \{a,b\}^* \mid \ |w| \text{ ist keine Primzahl}\} \end{array}$$

Zeigen Sie, dass die Sprachen L_2, L_3 und L_4 nicht regulär sind.

Aufgabe 15
Wir betrachten die Sprachen L_2, L_3 und L_4:

$$\begin{array}{lcl} L_2 & := & \{w \in \{a,b,c\}^* \mid aa, ab, ba \text{ oder } bb \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } w \text{ enthält genau so viele } a\text{'s wie } b\text{'s}\} \\ L_3 & := & \{w \in \{a,b\}^* \mid aa \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } bb \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } |w| \text{ ist eine Quadratzahl}\} \\ L_4 & := & L((a+b)^* \cdot (aa+bb) \cdot (a+b)^*) \cup \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist Primzahl}\} \end{array}$$

1. Zeigen Sie, die Sprachen L_2, L_3 und L_4 die reguläre Pumpingeigenschaft haben.
2. Zeigen Sie, dass die Sprachen L_2, L_3 und L_4 nicht regulär sind.

Viel Erfolg bei der Zwischenklausur!
