Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 3

Abgabetermin: 09.11.2015

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen, Vornamen, und Ihre Übungsgruppe an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
– Aufgabe 1,
– Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
– Aufgaben 11, 12 und 13

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeigen Sie:

1. Jede endliche Sprache über Σ wird durch einen finiten Automaten erkannt.
2. Jede endliche Sprache über Σ wird durch einen regulären Ausdruck beschrieben.
3. Jede co-endliche Sprache über Σ wird durch einen finiten Automaten erkannt.
4. Jede co-endliche Sprache über Σ wird durch einen regulären Ausdruck beschrieben.

Definition: Eine Sprache über Σ heißt *co-endlich* genau dann, wenn ihr Komplement endlich ist.

Aufgabe 4
Sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definieren wir die Relation $\mathcal{R}$ vermöge:

$$x\mathcal{R}y \;:\Longleftrightarrow x \equiv y \bmod k$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}$ eine Rechtskongruenzrelation auf $(\mathbb{Z}, +)$ und auf $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist.

Aufgabe 5
Kann man die reguläre Pumping-Eigenschaft wie folgt abändern?

1. "$(\forall w \in L$ mit $|w| \geq k)$" durch "$(\forall w \in L)$" ersetzen.
2. "$(\forall i \in \mathbb{N})$" durch "$(\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$" ersetzen.
3. "$(\forall w \in L$ mit $|w| \geq k)$" durch "$(\forall w \in \Sigma^*$ mit $|w| \geq k)$" ersetzen.
4. Die Bedingung "$v \neq \lambda$" weglassen.

Welche Auswirkungen hätten diese Änderungen? Geben Sie gegebenenfalls Sprachen an, die die geänderte Eigenschaft erfüllen, die ungeänderte Eigenschaft jedoch nicht (oder umgekehrt). Begründen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 6
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Zeigen Sie mit Hilfe des regulären Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen L_i über Σ nicht regulär sind.

$$\begin{array}{lcl} L_1 & := & \{w \in \{a,b\}^+ \mid \exists n \in \mathbb{N} : |w| = n^5\} \\ L_2 & := & \{wcw \mid w \in \{a,b\}^+\} \\ L_3 & := & \{a^{4n}b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_3 & = & \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \ \wedge \ k \text{ ist Primzahl}\} \end{array}$$

Aufgabe 7
Zeigen Sie, dass $L := \{w \in \{a,b\}^* \mid aa$ ist Teilwort von w oder bb ist Teilwort von w oder $|w|$ ist eine Kubikzahl$\}$ die reguläre Pumpingeigenschaft hat.
Hinweis: Wir werden später zeigen, dass diese Sprache nicht regulär ist.

Aufgabe 8
Sei $K = \{q_1, \ldots, q_n\}$ und $M = (K, \Sigma, \delta, q_1, \{q_n\})$ ein NFA. Wir benutzen die Definitionen von $R(i,j,k)$ aus der Vorlesung. Zeigen Sie mit Hilfe der in Vorlesung bewiesenen Gleichung

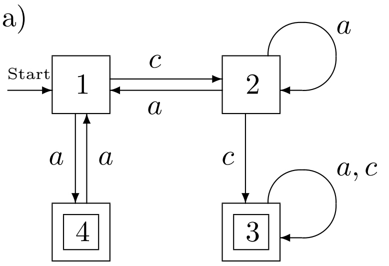
$$R(i,j,k) = R(i,j,k-1) \cup R(i,k,k-1) \cdot (R(k,k,k-1))^* \cdot R(k,j,k-1)$$

die folgenden Aussagen:

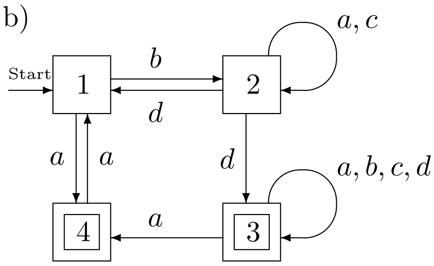
1. $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \ \ \forall k \in \{0, \ldots, n\} : \ \lambda \in R(i,i,k)$
2. $\forall i,k \in \{1, \ldots, n\} \ : \ R(i,k,k) = R(i,k,k-1) \cdot (R(k,k,k-1))^*$
3. $\forall i,k \in \{1, \ldots, n\} \ : \ R(k,i,k) = (R(k,k,k-1))^* \cdot R(k,i,k-1)$
4. $\forall k \in \{1, \ldots, n\} \ : \ R(k,k,k) = (R(k,k,k-1))^*$

Aufgabe 9
Gegeben seien die folgenden finiten Automaten (der Startzustand s ist durch "Start" gekennzeichnet, die akzeptierenden Zustände durch die doppelte Einrahmung). Geben Sie reguläre Ausdrücke zu den von folgenden Automaten erkannten Sprachen an.

a)



b)



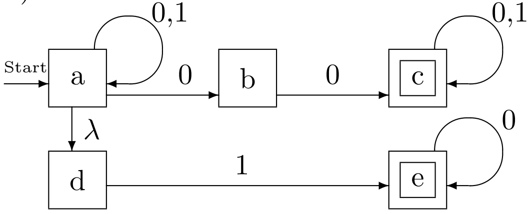
Lehnen Sie sich an die $R(i,j,k)$-Konstruktion aus der Vorlesung an. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise

Aufgabe 10
.Seien A und B beliebige Teilmengen von $\{0,1\}^*$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche sind falsch? Beweisen Sie Ihre Behauptungen!

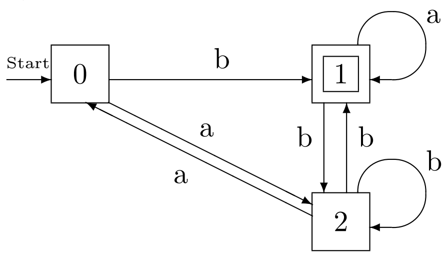
1. $(A)^+ = A^* \setminus \{\lambda\}$.
2. $(A)^* = A^+ \cup \{\lambda\}$.
3. Sind A und B regulär, so ist auch $A \setminus B$ regulär.
4. Sind A und B regulär pumbbar, soist auch $A \cup B$ regulär.
5. Ist A regulär und $B \subseteq A$, so ist auch B regulär.
6. Jede endliche Sprache hat die reguläre Pumping-Eigenschaft.

Aufgabe 11
Gegeben seien die folgenden finiten Automaten (der Startzustand s ist durch "Start" gekennzeichnet, die akzeptierenden Zustände durch die doppelte Einrahmung). Geben Sie reguläre Ausdrücke zu den von folgenden Automaten erkannten Sprachen an.

A)



B)



Lehnen Sie sich an die $R(i,j,k)$-Konstruktion aus der Vorlesung an. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise.

Aufgabe 12
Sei $\Sigma = \{a, b, d\}$ ein Alphabet. Zeigen Sie mit Hilfe des regulären Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen L_i über Σ nicht regulär sind.

$$\begin{array}{lcl} L_4 & := & \{w \cdot d \cdot \overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^+\} \\ L_5 & := & \{w \in \{a,b,d\}^+ \mid \exists n \in \mathbb{N} : |w| = n^4\} \\ L_6 & := & \{a^n d^n b^k \mid n, m, k \in \mathbb{N} \ \wedge \ m \text{ ist Primzahl}\} \end{array}$$

Definition: $\overleftarrow{w}$ ist induktiv definiert vermöge $\overleftarrow{\lambda} := \lambda$ sowie $\overleftarrow{v \cdot x} := x \cdot \overleftarrow{v}$ für $x \in \Sigma$ und $v \in \Sigma^*$.

Aufgabe 13
Seien A und B beliebige Teilmengen von $\{0,1\}^*$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche sind falsch? Beweisen Sie Ihre Behauptungen!

1. Ist A regulär pumpbar und $B \subseteq A$, so ist auch B regulär pumpbar.
2. Ist A nicht regulär pumpbar und $A \subseteq B$, so ist auch B nicht regulär pumpbar.
3. Ist A regulär und $B \subseteq A$, so ist auch B regulär.
4. Ist $A \cap B$ regulär, so sind auch A und B regulär.
5. Es gibt eine endliche Sprache über dem Alphabet $\{0,1\}$, welche die reguläre Pumping-Eigenschaft nicht besitzt.