Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 12

Abgabetermin: 01.02.2016

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen, Vornamen, und Ihre Übungsgruppe an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 12, 13, 14 und 15

Aufgabe 1
Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Wir betrachten die Funktion f, welche das Programm u einer Turing-Maschine M_u in das Programm v einer Turing-Maschine M_v abbildet die sich wie folgt verhält:

- Bei Eingabe eines Wortes x löscht M_v zunächst seine Eingabe (d.h. M_v ersetzt x durch λ). Anschließend schreibt M_v das Paar (u, u) auf das Band und verhält sich anschließend wie die universelle Turing Maschine (d.h. M_v simuliert M_u auf Input u). Anschließend löscht M_v ihr Band und stoppt.

Zeigen Sie:

1. f ist berechenbar.
2. f ist jeweils eine Reduktionsfunktion von $H_1 = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u)\downarrow\}$ auf die folgenden Sprachen L_i ($i = 1,\dots,4$)

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v\ (\lambda)\downarrow\}\\
L_2 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } L(M_v) \neq \emptyset\ \}\\
L_3 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ stoppt für unendlich viele Eingaben}\}\\
L_4 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } \exists x : M_v(x)\downarrow \lambda\}\\
L_5 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } \forall x : M_v(x)\downarrow \lambda\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4
Sei

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{x \mid x \text{ ist Code einer TM und } \exists y : M_x(y)\downarrow 11\}, \quad \text{und}\\
L_2 &:= \{x \mid x \text{ ist Code einer TM und } \exists z : M_x(x)\downarrow z \ \wedge\ z \neq x\}.
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß L_1 und L_2 aufzählbar sind,
– indem Sie jeweils eine erkennende Turing-Maschine skizzieren, sowie
– indem Sie L_1 bzw. L_2 jeweils auf $H_1 = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u)\downarrow\}$ reduzieren.

Aufgabe 5
Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0,1\}^*$)

1. $(A \leq_m B \,\wedge\, B \in \mathrm{REC}\,) \implies A \in \mathrm{REC}$.
2. $(A \leq_m B \,\wedge\, A \notin \mathrm{RE}\,) \implies B \notin \mathrm{RE}$.
3. Ist A entscheidbar, $B \neq \emptyset$, $B \neq \{0,1\}^*$, dann ist $A \leq_m B$.
4. $[\, L \in \mathrm{RE} \wedge L \notin \mathrm{REC}\,] \Longrightarrow [L \not\leq_m \overline{L}$ und $\overline{L} \not\leq_m L]$.
5. $H_1 \leq_m \big(\{1\} \cdot H_1 \,\cup\, \{0\} \cdot \overline{H_1}\big)$, $\overline{H_1} \leq_m \big(\{1\} \cdot H_1 \,\cup\, \{0\} \cdot \overline{H_1}\big)$
6. Es gibt eine Sprache L, so daß weder die Sprache L noch ihr Komplement $\overline{L}$ aufzählbar sind.
7. Es gibt nicht-entscheidbare Sprachen A und B mit $A \leq_m B$ und $B \not\leq_m A$.

Aufgabe 6
Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0,1\}^*$, vollständig jeweils bezüglich $\leq_m$)

1. (A RE-vollständig und $A \leq_m B$ und $B \in \mathrm{RE}$) $\implies$ B RE-vollständig.
2. H und H_1 sind RE-vollständig.
3. Es gibt RE-vollständige Sprachen in $\{0\}^*$.
4. Keine entscheidbare Sprache ist RE-vollständig.
5. Jede nicht-triviale entscheidbare Sprache ist REC-vollständig..

Aufgabe 7
Wir betrachten die Funktion f, welche das Programm u einer Turing-Maschine M_u in das Programm v einer Turing-Maschine M_v mit Eingabealphabet Σ abbildet die sich wie folgt verhält:
Bei Eingabe eines Wortes $x \in \Sigma^*$ simuliert M_v zunächst M_u auf Input u für höchstns $|x|$ Schritte. Wird innerhalb diese $|x|$ Schritte die Simulation beendet (also stoppt M_u auf Input u in weniger als $|x|$ Schritten), startet M_v eine Endlosschleife (der Input x wird verworfen); wird die Simulation hingegen nicht beendet (M_u führt auf Input u mehr als $|x|$ Schritte aus, so löscht M_v ihr Band und stoppt. M_v akzeptierend (der Input x wird akzeptiert, λ wird ausgegeben).

1. Zeigen Sie, dass f berechenbar ist.
2. Zeigen Sie, dass f eine Reduktionsfunktion von $H_1 = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u)\downarrow\}$ auf die folgenden Sprachen L_i ist ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } L(M_v) \neq \Sigma^*\} \\ L_2 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } \exists x : M_v(x)\uparrow\} \\ L_3 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ stoppt nur für unendlich viele Eingaben}\} \end{aligned}$$

3. Zeigen Sie, dass f eine Reduktionsfunktion von $\overline{H_1} = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u)\uparrow\}$ auf die folgenden Sprachen L_i ist ($i = 4, 5$)

$$\begin{aligned} L_4 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } L(M_v) = \Sigma^*\} \\ L_5 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } \forall x : M_v(x)\downarrow \lambda\} \end{aligned}$$

Aufgabe 8
Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar? Bei welchen Sprachen kann der Satz von Rice angewendet werden? Begründen Sie ihre Angaben.

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ hat eine ungerade Anzahl von Zuständen}\} \\ L_2 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und bei Eingabe von 010 wird im Laufe der Berechnung ein } a \text{ gedruckt}\} \\ L_3 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ stoppt für unendlich viele Eingaben.}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 9
Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen L_1und L_2 nicht aufzählbar sind.

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } L(M_v) = \Sigma^*\} \\ L_2 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } \forall x : M_v(x)\downarrow \lambda\} \end{aligned}$$

Hinweis: Reduzieren sie $\overline{H_1} = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u)\uparrow\}$ auf die Sprachen.

Aufgabe 10
Seien $L, L' \subseteq \{a,b\}^*$. Zeigen Sie:

1. Sind L und L' entscheidbar, so sind auch $L \cap L'$ und $L \cup L'$ entscheidbar.
2. Ist L entscheidbar, so ist auch $\overline{L} = \{a,b\}^* \setminus L$ entscheidbar.
3. Sind L und L' entscheidbar, so ist auch $L \cdot L'$ entscheidbar.
4. Sind L aufzählbar, so ist auch L^* aufzählbar.
5. Ist L entscheidbar, so ist $\overline{L}$ semi-entscheidbar.

Aufgabe 11
Zeigen Sie, dass es Sprachen L_0, L_1, L_2, L_3 sowie L'_0, L'_1, L'_2, L'_3 gibt mit

1. $L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset L_3$, und
2. $L'_0 \supset L'_1 \supset L'_2 \supset L'_3$, und
3. L_3, L'_3 regulär, L_2, L'_2 kontextfrei und nichtregulär, L_1, L'_1 entscheidbar und nichtkontextfrei und L_0, L'_0 aufzählbar und nichtentscheidbar.

Aufgabe 12
Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm mit den Sprachklassen, die durch die Chomsky-Typ-i-Grammatiken festgelegt werden ($i = 0,1,2,3$), den endlichen Sprachen, den entscheidbaren Sprachen sowie der Klasse aller Sprachen. Tragen Sie für $j = 1,\ldots,6$ die folgenden Sprachen $L_j := \{a^n b^{f(n)} \mid n \in \mathrm{def}(f_j)\}$ ein, wobei die Funktionen $f_j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert sind durch:

$$\begin{aligned}
f_1(n) &= 2 \cdot n \\
f_2(n) &= n^2 \\
f_3(n) &= 2^n \\
f_4(n) &= \chi_{\mathrm{UN}(H_1)}(n) \quad \text{(charakteristische Funktion von } \mathrm{UN}(H_1)\text{)} \\
f_5(n) &= \chi'_{\mathrm{UN}(H_1)}(n) \quad \text{(semi-charakteristische Funktion von } \mathrm{UN}(H_1)\text{)} \\
f_6(n) &= \chi'_{\overline{\mathrm{UN}(H_1)}}(n) \quad \text{(semi-charakteristische Funktion von } \overline{\mathrm{UN}(H_1)}\text{)}
\end{aligned}$$

Begründen Sie Ihre Eintragungen!

$\mathrm{UN}(H_1)$ ist die unäre Version des Selbstanwenderproblems.

Aufgabe 13
Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0,1\}^*$)

1. $(A \leq_m B \wedge B \in \mathrm{RE}) \implies A \in \mathrm{RE}$.
2. $(A \leq_m B \wedge A \notin \mathrm{REC}) \implies B \notin \mathrm{REC}$.
3. $A \leq_m B \iff \overline{A} \leq_m \overline{B}$
4. $\neg(\overline{H_1} \leq_m H_1)$
5. $\big(\{1\} \cdot H_1 \cup \{0\} \cdot \overline{H_1}\big) \not\leq_m H_1$
6. Es gibt eine Sprache L, so daß weder die Sprache L noch ihr Komplement $\overline{L}$ aufzählbar sind.
7. Sind A und B RE-vollständig, so gilt $A \equiv_m B$.

Aufgabe 14
Zeigen sie, dass die folgenden Sprachen nicht entscheidbar sind, indem Sie $H_1 = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u)\downarrow\}$ auf diese Sprachen reduzieren:

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v\ (010)\downarrow\} \\
L_2 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } |L(M_v)| = \infty\ \} \\
L_3 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ stoppt immer}\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 15
Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar? Bei welchen Sprachen kann der Satz von Rice angewendet werden? Begründen Sie ihre Angaben.

$L_1 := \{v \mid v$ ist Code einer TM und M_v hat eine gerade Anzahl von Zuständen$\}$
$L_2 := \{v \mid v$ ist Code einer TM und bei Eingabe von λ wird im Laufe der Berechnung ein a gedruckt$\}$

Definition [(semi-)charakteristische Funktion]:
Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sind die *semi-charackteristische Funktion* φ_L und die *charakteristische Funktion* χ_L definiert durch:

- $\varphi_L : \Sigma^* \to \{0,1\}^*$ mit $\varphi_L(x) := \begin{cases} 1\,, & \text{falls } x \in L, \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\chi_L : \Sigma^* \to \{0,1\}^*$ mit $\chi_L(x) := \begin{cases} 1\,, & \text{falls } x \in L, \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$

Definition: [reduzierbar]:

$$\begin{aligned} L \leq_m L' &\iff L \text{ \textbf{(many-one) reduzierbar} auf } L' \\ &:\iff \exists\, f : \Sigma_L^* \to \Sigma_{L'}^* \text{ total und berechenbar mit} \\ &\qquad\qquad \forall w \in \Sigma_L^* : w \in L \iff f(w) \in L' \\ L \equiv_m L' &:\iff (L \leq_m L' \;\wedge\; L' \leq_m L) \end{aligned}$$

Definition: [vollständig]:
Für eine Sprachklasse $\mathcal{L}$ heisst eine Sprache A **$\mathcal{L}$-vollständig** bzgl. der Reduktion $\leq_m$ genau dann, wenn $A \in \mathcal{L}$ und $\forall L \in \mathcal{L} : L \leq_m A$.

Notation: Für eine Turing-Maschine M und ein Inputwort w bedeutet:

$M(w)\uparrow$	:	M angesetzt auf w stoppt nicht,
$M(w)\downarrow$	:	M angesetzt auf w stoppt,
$M(w)\downarrow v$	:	M angesetzt auf w stoppt mit Ausgabe v.
H	:=	$\{\langle u,v\rangle \mid u$ ist Code einer TM und $M_u(v)\downarrow\}$
H_1	:=	$\{u \mid u$ ist Code einer TM und $M_u(u)\downarrow\}$
