Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 11

Abgabetermin: 25.01.2016

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen, Vornamen, und Ihre Übungsgruppe an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 14, 15, 16, 17, 18 und 19

Aufgabe 1

Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

1. $g : \mathbb{N}^1 \to \mathbb{N}$ mit $g(n) = \text{zero}_1(n)$ (1-stellige Nullfunktion)
   $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $h(n, m, l) = p_3^{(3)}(n, m, l)$ (dritte 3-stellige Projektion)
2. $g : \mathbb{N}^1 \to \mathbb{N}$ mit $g(n) = \text{zero}_1(n)$ (1-stellige Nullfunktion)
   $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $h(n, m, l) = p_2^{(3)}(n, m, l)$ (zweite 3-stellige Projektion)
3. $g : \mathbb{N}^1 \to \mathbb{N}$ mit $g(n) = \text{zero}_1(n)$ (1-stellige Nullfunktion)
   $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $h(n, m, l) = s \circ p_2^{(3)}(n, m, l)$ (zweite 3-stellige Projektion, um 1 inkrementiert)

Aufgabe 4

Geben Sie Funktionen g und h an, so dass durch primitive Rekursion $\text{PR}(g, h)$ die folgenden Funktionen f entstehen.

1. $f : \mathbb{N}^1 \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = n^2$
2. $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(n, m) = n \cdot m$
3. $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(n, m) = n^m$
4. $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(n, m) = n \dot{-} m$
5. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n)$ ist kleinster Nichtteiler von n, falls $n > 0$ und 0 sonst.
6. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n)$ ist i-te Fibonacci-Zahl a_i ($a_0 := a_1 := 1$ und für $i \geq 2$ ist $a_i := a_{i-1} + a_{i-2}$).
7. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n)$ ist i-te Primzahl p_i ($p_0 := 2,\ p_1 = 3$ etc.).

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind:

1. $\mathrm{sg} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{sg}(x) :=$ `if` $x = 0$ `then` 0 `else` 1;
2. $\overline{\mathrm{sg}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\overline{\mathrm{sg}}(x) := 1 \dot{-} \mathrm{sg}(x)$
3. $t : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $t(n,m) = \begin{cases} 1, & \text{falls}\, m \,\text{teilt}\, n, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
4. $d : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $d(n,m) = \begin{cases} n//m, & \text{falls}\, m > 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
   ($n//m$ bezeichnet die ganzzahlige Division; $n//m := \lfloor n/m \rfloor$)
5. $r : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $r(n,m) = \begin{cases} n \bmod m, & \text{falls}\, m > 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
6. $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $p(n)$ ist n-te Primzahl $\quad (p(0) := 2,\ p(1) = 3$ etc.).
7. $e : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $e(n,m) = \begin{cases} \max\{i \mid m^i \text{ teilt } n\}, & \text{falls}\, m > 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe 6
Wir betrachten die Cantor-Nummerierung f von $\mathbb{N}^2$:

$$\begin{array}{c|cccccc} \vdots & \vdots & & & & & \\ 4 & 14 & \cdots & & & & \\ 3 & 9 & 13 & \cdots & & & \\ 2 & 5 & 8 & 12 & \cdots & & \\ 1 & 2 & 4 & 7 & 11 & \cdots & \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & \cdots \\ \hline f & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \end{array}$$

1. Zeigen Sie, dass f primitiv rekursiv ist.
   Hinweis: Nutzen Sie die Funktion $g(n) := 1 + 2 + \cdots + n$ und beachten Sie dass $f(n,0) = g(n)$ ist.
2. Wir bezeichnem f als *(2-stellige) Paarungsfunktion* und notieren häufig $f(n,m)$ durch $\langle n,m \rangle$. Mit π_1 und π_2 bezeichnen wir die beiden "inversen" Funktionen, mit denen man aus $\langle n,m \rangle$ wieder n und m zurück bekommen kann, also $\pi_1(\langle n,m \rangle) = n$ und $\pi_2(\langle n,m \rangle) = m$. Zeigen Sie, dass auch π_1 und π_2 primitiv rekursiv sind sowie dass $\langle \pi_1(x), \pi_2(x) \rangle = x$ für alle x aus $\mathbb{N}$ gilt.
3. Konstruieren Sie mit Hilfe von f auch eine k-stellige Paarungsfunktion für $\mathbb{N}^k$.

Aufgabe 7 (Simultane Rekursion)
Die $(n+1)$-stelligen Funktion f_1 und f_2 entstehen aus den n-stelligen Funktion g_1 und g_2 sowie den $(n+3)$-stelligen Funktionen h_1 und h_2 durch simultane Rekursion wenn gilt

$$\begin{array}{lcl} f_1(x_1,\ldots,x_n,0) & := & g_1(x_1,\ldots,x_n) \\ f_2(x_1,\ldots,x_n,0) & := & g_2(x_1,\ldots,x_n) \\ f_1(x_1,\ldots,x_n,y+1) & := & h_1(x_1,\ldots,x_n,y,f_1(x_1,\ldots,x_n,y),f_2(x_1,\ldots,x_n,y) \\ f_2(x_1,\ldots,x_n,y+1) & := & h_2(x_1,\ldots,x_n,y,f_1(x_1,\ldots,x_n,y),f_2(x_1,\ldots,x_n,y) \end{array}$$

Zeigen Sie, dass mit $g_{1,}g_2$ und $h_{1,}h_2$ auch wiederum f primitiv rekursiv ist.
Hinweis: Denken Sie an die Paarungsfunktion aus der vorhergehenden Aufgabe.

Aufgabe 8
Zeigen Sie, dass es totale Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ gibt, die nicht primitiv rekursiv sind.

Aufgabe 9
Mit $\mathrm{KOMP}_m^{(n)}(g, h_{1,} \ldots, h_m)$ bezeichnen wir die n-stellige Funktion, die mittels Koposition der m-stelligen Funktion g und den m vielen n-stelligen Funktionen $h_{1,} \ldots, h_m$ entsteht. Mit $\mathrm{PR}^{(n+1)}(g, h)$ bezeichnen wir die $(n+1)$-stellige Funktion, die mittels primitiver Rekursion aus der n-stelligen Funktion g und der $(n+1)$-stellige Funktion h entsteht. Zusammen mit den Bezeichnungen zero_k, s und $p_i^{(n)}$für die Grundfunktionen kann damit durch einen Text (Wort) über ein geeignetes Alphabet Σ beschrieben werden, wie eine primitiv rekursive Funktion durch iterierte Komposition und primitive Rekursion aus den Grundfunktionen entsteht. Dies ist dann der Name für die primitiv rekursive Fuktion, der Name bezeichnet die Funktion (Beachten Sie, dass eine Funktion viele Namen haben kann.) Bei den Worten aus Σ^* können wir entscheiden, ob sie eine primitiv rekursive Funktion beschreiben. Falls keine primitiv rekursive Funktion beschrieben wird, ordnen wir willkürlich die 1-stellige Nullfunktion zu. Die Wörter aus Σ^* können wir aufzählen, und damit können wir auch die (Namen der) primitiv rekursiven Funktionen aufzählen: die i-te primitiv rekursiven Funktion ξ_i ist die Funktion, die durch das i-te Wort w_i aus Σ^* festgelegt wird. Am beschreibenden Text können wir auch die Stelligkeit erkennen (Aufgabe: wieso?). Damit können wir auch die 1-stelligen primitiv rekursiven Funktion ρ_i aufzählen (entspricht ein Text wiederum keiner primitiv rekursiven Funktion oder einer andersstelligen, so ordnen wir wiederum willkürlich die 1-stellige Nullfunktion zu.

1. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(i, n) = \rho_i(n)$ total und berechenbar ist.
2. Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(i) = \rho_i(i) + 1$ total und berechenbar ist, jedoch nicht primitiv ist.
3. Zeigen Sie, dass es totale, berechenbare Funktionen gibt, die nicht primitiv rekursiv sind.

Aufgabe 10
Eine Liste $L = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^*$ von natürlichen Zahlen kann dargestellt werden durch eine natürliche Zahl $\Psi(L) \in \mathbb{N}$ mit

$$\Psi((a_0, \ldots, a_n)) = (p(0))^{a_0+1} \cdot \cdots \cdot (p(n))^{a_n+1} = \prod_{i=0}^{n} (p(i))^{a_i+1}$$

wobei p eine totale injektive monotone Aufzählung der Primzahlen istt ist. Die leere Liste $L_\lambda = ()$ wird somit dargestellt durch 1 (also $\Psi(L_\lambda) = 1$). Ψ ist somit eine Funktion von $\mathbb{N}^*$ nach $\mathbb{N}$.

1. Bestimmen Sie $\Psi((3))$, $\Psi((3, 3))$, $\Psi((2, 3))$, $\Psi((2, 3))$, $\Psi((0, 1, 2, 3))$
2. Ist Ψ eine surjektive Funktion von $\mathbb{N}^*$ nach $\mathbb{N}$?
3. Bestimmen Sie $\Psi(\mathbb{N}^*)$.
4. Geben Sie eine primitiv rekursive Funktion an, die für ein $n \in \mathbb{N}$ angibt, ob $n \in \Psi(\mathbb{N}^*)$.
5. Geben Sie eine primitiv rekursive Funktion $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die die Länge der dargestellten Liste für $n \in \Psi(\mathbb{N}^*)$ angibt, sowie für $n \in \mathbb{N} \setminus \Psi(\mathbb{N}^*)$ den Wert 0 hat.
6. Geben Sie eine primitiv rekursive Funktion $k : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ an, so dass $k(n, i)$ das $i-$te Element der dargestellten Liste für $n \in \Psi(\mathbb{N}^*)$ und $0 \leq i < l(n)$ angibt, und ansonsten den Wert 0 hat.

Hinweis: Denken Sie an Aufgabe 5.

Aufgabe 11
Zu einer n-stelligen Funktion g und den $(n + 2)$-stelligen Funktionen h_1 und h_2 definieren wir die $(n + 1)$-stelligen Funktion f durch

$$\begin{array}{lcl} f(x_1, \ldots, x_n, 0) & := & g(x_1, \ldots, x_n) \\ f(x_1, \ldots, x_n, y + 1) & := & h_1(\ x_1, \ldots, x_n\ ,\ y\ ,\ f(\ x_1, \ldots, x_n, \min(y, h_2(x_1, \ldots, x_n, y))\ )\ ) \end{array}$$

Zeigen Sie, dass mit g, h und h_2 auch wiederum f primitiv rekursiv ist.
Hinweis: Denken Sie an Aufgabe 10.

Aufgabe 12
Wir betrachten die natürlichen Zahlen als Ziffern. Für ein $b \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$ interpretieren wir eine endliche Folge $a = (a_n, \dots, a_0) \in \mathbb{N}^*$, wobei $a_n \neq 0$ und $a_i < b$ für $i = 1, \dots, n$, als Ziffernfolge zur Basis b interpretieren, die dann eineindeutig eine Zahl $W(a) \in \mathbb{N}$ repräsentiert (in der üblichen Weise, a_0 die niederwertigste Ziffer). Der Wert 0 wird durch die Ziffernfolge (0) dargestellt.

Für ein $N \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{N}$ bezeichnen $\mathrm{length}(N, b)$ die Länge der Zifferndarstellung zur Basis b der durch N dargestellten Zahl und $\mathrm{digit}(N, i, b)$ die i-te Ziffer (0-te Ziffer ist niederwertigste) in dieser Darstellung. Beide Funktionen werden willkürlich vervollständigt duch $\mathrm{length}(N, 0) = \mathrm{length}(N, 1) := 0$ sowie $\mathrm{digit}(N, i, b) := 0$, falls $b = 0$ oder $b = 1$ oder $i > \mathrm{length}(N, b)$.

Zeigen Sie, dass $\mathrm{length} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ und $\mathrm{digit} : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv sind.

Aufgabe 13
Zu einer $(n+1)$-stelligen Funktion $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ definieren wir die n-stelligen Funktion $M(f) : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ vermöge

$$M(f)(x_1, \dots, x_n) := \begin{cases} \text{kleinstes } y, \text{ so dass } f(x_1, \dots, x_n, y) = 0, & \text{falls ein solches } y \text{ existiert,} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} . \end{cases}$$

Beachten Sie, dass bei dieser Definition nicht verlangt wird, dass $f(x_1, \dots, x_n, i)$ für die kleineren i definiert ist.

1. Sei χ'_{H_1} die semi-charakteristische Funktion von $H_1 = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u) \downarrow\}$. Wir definieren $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ durch:
$$h(x, y) = \mathrm{sg}(x \dot{-} y) + \overline{\mathrm{sg}}(\chi'_{H_1}(y))$$
Charakterisieren Sie die Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(x) = \mathrm{sg}(M(h)(x) \dot{-} x)$.
2. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Ist f eine berechenbare Funktion, so ist auch $M(f)$ eine berechenbare Funktion.n.

Aufgabe 14
Welche Funktion f entsteht durch primitive Rekursion $\mathrm{PR}(g,h)$ aus folgenden Funktionen g und h?

$g : \mathbb{N}^1 \to \mathbb{N}$ mit $g(n) = \mathrm{zero}_1(n)$
$h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $h(n,m,l) = p_2^{(3)}(n,m,l) + s \circ p_2^{(3)}(n,m,l) + p_3^{(3)}(n,m,l)$

Aufgabe 15
Zeigen Sie dass die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = n^n$ primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 16
Zeigen Sie, dass es eine bijektive, primitiv rekursive Funktion von $\mathbb{N}^2$ auf $\mathbb{N}$ gibt.

Aufgabe 17
Sei f eine primitiv rekursive Funktion von $\mathbb{N}^{k+1}$ nach $\mathbb{N}$ mit $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktionen f_Σ, f_Π , $f_{\max}$ und $f_{\min}$ von $\mathbb{N}^{k+1}$ nach $\mathbb{N}$ primitiv rekursiv sind, wo:

$$\begin{aligned}
f_\Sigma(x_1,\dots,x_k,y) &= \textstyle\sum_{i\le y} f(x_1,\dots,x_k,i)\\
f_\Pi(x_1,\dots,x_k,y) &= \textstyle\prod_{i\le y} f(x_1,\dots,x_k,i)\\
f_{\max}(x_1,\dots,x_k,y) &= \max_{i\le y} f(x_1,\dots,x_k,i)\\
f_{\min}(x_1,\dots,x_k,y) &= \min_{i\le y} f(x_1,\dots,x_k,i)
\end{aligned}$$

Aufgabe 18
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert vermöge $f(0) = 4711$ und $f(n) = 42 \cdot f(n//2) + 21 \cdot f(n//3)$ für $n > 0$. Zeigen Sie, dass f primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 19
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gibt eine streng monoton steigende primitiv rekursive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
2. Es gibt eine streng monoton fallende primitiv rekursive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
3. Ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv, so ist f surjektiv.
4. Ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv, so ist f total.

Notation:

- $\mathbb{N}$ bezeichnet die natürlichen Zahlen inklusive der 0.
- $n \dot{-} m := \begin{cases} n-m, & \text{falls } n \ge m,\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$
- $\mathrm{sg}(x) :=$ `if` $x = 0$ `then` 0 `else` 1
- $\overline{\mathrm{sg}}(x) := 1 \dot{-} \mathrm{sg}(x)$
