Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 10

Abgabetermin: 18.01.2016

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen, Vornamen, und Ihre Übungsgruppe an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 16, 17, 18, 19 und 20

Aufgabe 1

Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

1. L ist entscheidbar.
2. L und $\overline{L}$ sind semi-entscheidbar.
3. Es gibt eine Turingmaschine, die akzeptierend stoppt falls $x \in L$, und verwerfend stoppt, falls $x \notin L$.
4. $L = \text{Bild}(f)$ für eine totale berechenbare streng-monoton steigende Funktion $f : \{1\}^* \to \Sigma^*$ oder L ist endlich.
5. Die charakteristische χ_L Funktion von L ist berechenbar.

Aufgabe 4

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Die Menge der abzählbaren Sprachen über Σ ist überabzählbar.
2. Die Menge der aufzählbaren Sprachen über Σ ist abzählbar.
3. Es gibt nicht-aufzählbare Sprachen über Σ.

Aufgabe 5

Seien $L, L' \subseteq \{a, b\}^*$. Zeigen Sie:

1. Sind L und L' aufzählbar, so ist auch $L \cup L'$ aufzählbar.
2. Sind L und L' semi-entscheidbar, so ist auch $L \cap L'$ aufzählbar.
3. Sind L und L' aufzählbar, so ist auch $L \cdot L'$ aufzählbar.
4. Ist L aufzählbar, so ist auch L^* aufzählbar.
5. Ist L entscheidbar, so ist L aufzählbar.

Aufgabe 6

Geben Sie eine Turing-Maschine an, die aus einem Bandinhalt der Form $w_1 \Box w_2 \Box \cdots \Box w_k$ (beliebige Anzahl nichtleerer Worte, jeweils durch ein Blank ($\Box$) getrennt. $w_1, w_2, \ldots, w_k \in \{0,1\}^+$) den Bandinhalt $w_1 \Box w_2 \Box \cdots \Box w_{k-1} \Box w_k \Box w_k \Box w_{k-1} \Box \cdots \Box w_2 \Box w_1$ erzeugt.

Aufgabe 7
Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

1. Jede Teilmenge einer aufzählbaren Sprache ist abzählbar.
2. Jede Teilmenge einer abzählbaren Sprache ist aufzählbar.
3. Jede Teilmenge einer abzählbaren Sprache ist abzählbar.
4. Jede Teilmenge einer entscheidbaren Sprache ist abzählbar.
5. Jede Obermenge einer nichtaufzählbaren Sprache ist nichtaufzählbar.
6. Jede Obermenge einer nichtentscheidbaren Sprache ist nichtentscheidbar.
7. Jede Teilmenge einer nichtentscheidbaren Sprache ist nichtentscheidbar.

Aufgabe 8
Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

1. L ist rekursiv aufzählbar.
2. L ist semi-entscheidbar.
3. $L = \mathrm{Bild}(f)$ für eine totale injektive berechenbare Funktion $f : \{1\}^* \to \Sigma^*$ oder L ist endlich.
4. $L = \mathrm{Bild}(f)$ für eine totale berechenbare Funktion $f : \{1\}^* \to \Sigma^*$ oder $L = \emptyset$.
5. $L = \mathrm{Bild}(f)$ für eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$.
6. $L = \mathrm{Def}(f)$ für eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$.
7. Die semi-charakteristische φ_L Funktion von L ist berechenbar.

Aufgabe 9
Geben Sie berechenbare Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 aus Σ^* nach Σ^* an, die folgende Eigenschaften haben:

1. $\mathrm{Def}(f_1)$ nicht-entscheidbar und $\mathrm{Bild}(f_1)$ entscheidbar.
2. $\mathrm{Def}(f_2)$ nicht-entscheidbar und $\mathrm{Bild}(f_2)$ nicht-entscheidbar.
3. $\mathrm{Def}(f_3)$ entscheidbar und $\mathrm{Bild}(f_3)$ nicht-entscheidbar.
4. $\mathrm{Def}(f_4)$ entscheidbar und $\mathrm{Bild}(f_4)$ entscheidbar.

Aufgabe 10
Seien $A_1, \ldots A_n$ paarweise disjunkte, aufzählbare Teilmengen von $\{0,1\}^*$ und sei A die Vereinigung der Mengen $A_1, \ldots, A_n$. Zeigen Sie: Falls A entscheidbar ist, dann sind auch alle Mengen A_i entscheidbar ($i = 1, \ldots, n$).

Aufgabe 11
Sei Σ ein Alphabet, so dass $H_1 \subseteq \Sigma^*$ und a, b, c weitere Zeichen (also $\Sigma \cap \{a, b, c\} = \emptyset$). Wir definieren:

$$\begin{array}{lcl} L_0 & := & \{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup H_1 \\ L_1 & := & \{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \Sigma^* \\ L_2 & := & \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\} \cdot L(c^*) \ \ \cup \ \Sigma^* \\ L_1 & := & L(a^* b^* c^*) \cup \Sigma^* \end{array}$$

Zeigen Sie, dass $L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset L_3$ und dass L_3 regulär, L_2 kontextfrei und nichtregulär, L_1 kontextsensitiv und nichtkontextfrei sowie L_0 aufzählbar und nichtkontextsensitiv ist.

Aufgabe 12
Zeigen Sie:

1. Zu jeder unendlichen aufzählbaren Sprache L gibt es unendlich viele verschieden Funktionen f, die L aufzählen.
2. Zu jeder semi-entscheidbaren Sprache L gibt es unendlich viele verschieden Turingmaschinen M, die L semi-entscheiden.
3. Zu jeder entscheidbaren Sprache L gibt es unendlich viele verschieden Turingmaschinen M, die L entscheiden.

Aufgabe 13
Zeigen Sie für folgende Sprachpaare (L_1, L_2), daß $L_1 \leq_m L_2$ und $L_2 \leq_m L_1$.

1. $L_1 := \{aa\}$ und $L_2 := \{b, a\}$,
2. $L_1 := \{aa\}$ und $L_2 := \{w \in \{c\}^* \mid |w| \text{ ist durch 4 teilbar}\}$,
3. $L_1 := \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \text{ ist gerade}\}$ und $L_2 := \{w \in \{c\}^* \mid |w| \text{ ist durch 4 teilbar}\}$,
4. $L_1 := \{w\overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}$ und $L_2 := \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Aufgabe 14
Sind folgende Funktionen $f : \{a, b\}^* \to \{a, b\}^*$ Reduktionen von L_1 auf L_2 $(L_1, L_2 \subseteq \{a, b\}^*)$?

1. $f(w) := a^{\#_a(w)}$, $L_1 := \{ab\}$ und $L_2 := \{b, a\}$.
2. $f(w) := ww$, $L_1 := \{w \in \{a, b\}^* \mid 2 \text{ teilt } |w|)\}$ und $L_2 := \{w \in \{a, b\}^* \mid 4 \text{ teilt } |w|\}$,
3. $f(w) := (bb)^{\#_a(w)}$, $L_1 := \{(aab)^n \in \{a, b\}^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $L_2 := \{w \in \{a, b\}^* \mid 4 \text{ teilt } \#_b(w)\}$,
4. $f(w) := w\overleftarrow{w}$, $L_1 := \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ endet mit } aa\}$ und $L_2 := \{w \in \{a, b\}^* \mid aaa \text{ Teilwort von } w\}$,
5. $f(w) := w\overleftarrow{w}$, $L_1 := \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ endet mit } a\}$ und $L_2 := \{uaav \mid u, v \in \{a, b\}^* \wedge |u| = |v|\}$.

Aufgabe 15
Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche nicht-aufzählbare Menge und sei $f : \mathbb{N} \to A$ definiert durch:

$$f(i) := \begin{cases} \min(A) & \text{falls } i = 0, \\ \min(A \setminus \{f(l) \mid l = 0, \ldots, i - 1\}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

1. f ist eine totale Bijektion $f : \mathbb{N} \to A$.
2. Die Funktion f ist keine Reduktion von $\mathbb{N}$ auf A.
3. Die Funktion $g : \{a\}^* \to \{a\}^*$ mit $g(a^n) := a^{f(n)}$ ist keine Reduktion von $\{a\}^*$ auf $\{a^i \mid i \in A\}$.

Aufgabe 16
Geben Sie eine Turing-Maschinen (mit Kommentierung) an, die folgende Funktion f berechnet:

$$f : \{a, b\}^* \to \{a, b\}^* \text{ mit } f(w) = \begin{cases} (bba)^{3 \cdot \#_b(w)} & \text{, falls} \quad \#_a(w) \text{ nicht durch 4 teilbar,} \\ \text{undefiniert} & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 17
Sei f eine Funktion aus Σ^* nach Σ^*. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. f berechenbar $\Longrightarrow$ Bild(f) aufzählbar.
2. f berechenbar $\Longrightarrow$ Def(f) aufzählbar.
3. f berechenbar und total $\Longrightarrow$ Bild(f) entscheidbar.
4. f berechenbar und total $\Longrightarrow$ Def(f) entscheidbar.

Aufgabe 18
Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

1. Jede Teilmenge einer aufzählbaren Sprache ist aufzählbar.
2. Jede Teilmenge einer entscheidbaren Sprache ist aufzählbar.
3. Jede aufzählbare Sprache hat eine entscheidbare Teilmenge.
4. Jede Teilmenge einer nichtaufzählbaren Sprache ist nichtaufzählbar.

Aufgabe 19
Welche der Eigenschaften "reflexiv", "symmetrisch", "antisymmetrisch", "transitiv" haben die Relationen "$\leq_m$" bzw. "$\equiv_m$" auf der Menge aller Sprachen über dem Alphabet $\{0, 1\}^*$? Beweisen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 20

Sind folgende Funktionen $f : \{a,b\}^* \to \{a,b\}^*$ Reduktionen von L_1 auf L_2 ($L_1, L_2 \subseteq \{a,b\}^*$)?

1. $f(w) := (w\overleftarrow{w})^2$,
   $L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist Quadratzahl}\}$ und $L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist Quadratzahl}\}$,
2. $f(w) := (bb)^{\#_a(w)}$,
   $L_1 := \{(aba)^{3n} \in \{a,b\}^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid 6 \text{ teilt } \#_b(w)\}$

Definition [(semi-)charakteristische Funktion]:

Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sind die *semi-charackteristische Funktion* φ_L und die *charakteristische Funktion* χ_L definiert durch:

- $\varphi_L : \Sigma^* \to \{0,1\}^*$ mit $\varphi_L(x) := \begin{cases} 1\,, & \text{falls } x \in L, \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\chi_L : \Sigma^* \to \{0,1\}^*$ mit $\chi_L(x) := \begin{cases} 1\,, & \text{falls } x \in L, \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$

Definition: [reduzierbar]:

$L \leq_m L' \iff L$ **(many-one) reduzierbar** auf L'

$:\iff \exists\, f : \Sigma_L^* \to \Sigma_{L'}^*$, total und berechenbar mit

$\forall w \in \Sigma_L^* : w \in L \iff f(w) \in L'$

$L \equiv_m L' \;:\iff (L \leq_m L' \;\wedge\; L' \leq_m L)$

Definition: [vollständig]:

Für eine Sprachklasse $\mathcal{L}$ heisst eine Sprache A **$\mathcal{L}$-vollständig** bzgl. der Reduktion $\leq_m$ genau dann, wenn $A \in \mathcal{L}$ und $\forall L \in \mathcal{L} : L \leq_m A$.

Notation: Für eine Turing-Maschine M und ein Inputwort w bedeutet:

$M(w)\uparrow$	:	M angesetzt auf w stoppt nicht,
$M(w)\downarrow$	:	M angesetzt auf w stoppt,
$M(w)\downarrow v$	:	M angesetzt auf w stoppt mit Ausgabe v.
H	:=	$\{\langle u,v\rangle \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(v)\downarrow\}$
H_1	:=	$\{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u)\downarrow\}$
