Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 1

Abgabetermin: 26.10.2015

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen, Vornamen, und Ihre Übungsgruppe an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 13, 14, 15, 16 und 17

Aufgabe 1

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

Sei Q die Menge der Bundesländer der Bundesrepublik Deutschland, und K die Menge der Paare $(a, b) \in Q \times Q$ für die das Bundesland a und das Bundesland b eine gemeinsame Grenze haben. Ist die Relation K reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch, transitiv?

Geben Sie jeweils eine kurze Begründung!

Hinweis: `http://de.wikipedia.org/wiki/Deutschland`

Aufgabe 4

Geben Sie für jede der folgenden Relationen an, welche der Eigenschaften reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch und transitiv auf sie zutreffen. Die Relationen seien jeweils über der Menge der Deutschen definiert.

1. x hat den gleichen Vater wie y.
2. x und y haben ein gemeinsames Kind.
3. x ist Vorfahre von y.

Geben Sie jeweils eine kurze Begründung!

Aufgabe 5

Wir betrachten das Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Geben Sie reguläre Ausdrücke für folgende Sprachen an:

$$\emptyset \ , \ \{\lambda\} \ , \ \Sigma \ , \ \Sigma^* \ , \ \Sigma^+$$

Aufgabe 6

Geben Sie einen regulären Ausdruck für die folgende Sprache an:

$$L := \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } abba \text{ oder } \#_a(w) \text{ ist nicht durch 4 teilbar}\}$$

Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise!
Notation: $\#_a(w)$ bezeichnet die Anzahl der Vorkommen des Zeichens a im Wort w.

Aufgabe 7
Geben Sie einen einen regulären Ausdruck für die folgende Sprache an:

$$L_5 := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } ababb \text{ und } \#_a(w) \text{ ist durch 7 teilbar}\}$$

Hinweis: Versuchen Sie sich an dieser Aufgabe, aber seien Sie nicht zu sehr enttäuscht, wenn sie keine zufriedenstellende Lösung finden.

Aufgabe 8
Sei A eine beliebige Wortmenge über dem endlcihen Alphabet Σ. Zeigen Sie:

1. Für $i \in \mathbb{N}$ gilt: $A \cdot A^i = A^i \cdot A$
2. Für $i \in \mathbb{N}$ gilt: $\{\lambda\}^i = \{\lambda\}$
3. Für $i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gilt: $\emptyset^i = \emptyset$
4. $\emptyset^* = \{\lambda\}$

Aufgabe 9
Seien A und B beliebige Teilmengen von $\{0,1\}^*$. Welche der folgenden Gleichungen sind richtig, welche sind falsch? Beweisen Sie Ihre Aussagen!

1. $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$,
2. $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$,
3. $(A^*)^* = A^*$,
4. $(A \cdot B)^* = A^* \cdot B^*$,
5. $(A \cdot B)^* = (A \cup B)^*$.

Aufgabe 10
Wir betrachten das Alphabet $\Sigma = \{0,1\}$. Geben Sie endliche Automaten für folgende Sprachen an:

$$\emptyset \ , \ \{\lambda\} \ , \ \Sigma \ , \ \Sigma^* \ , \ \Sigma^+$$

Aufgabe 11
Zwei Mengen A und B sind gleichmächtig (in Zeichen $|A| = |B|$) genau dann, wenn es eine Bijektion (total, injektiv, surjektiv) von A auf B gibt.7

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig sind.
2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$ und $\{0,1\}^*$ gleichmächtig sind.
3. Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}$ und $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$ und $[0;1) := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ gleichmächtig sind.
   Hinweis: Denken Sie an z. B. die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{1}{x}$.
4. Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ nicht gleichmächtig sind.

Aufgabe 12
Sei A eine Menge und $\mathcal{P}(A)$ die zugehörige Potenzmenge. Auf $\mathcal{P}(A)$ definieren wir die symetrische Differenz $\triangle$ vermöge:

$$B \triangle C := (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$$

Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(A), \triangle)$ eine abelsche Gruppe bildet.

Aufgabe 13
Seien A und B beliebige Teilmengen von $\{0,1\}^*$. Welche der folgenden Gleichungen sind richtig, welche sind falsch? Beweisen Sie Ihre Aussage!

1. $\emptyset = \{\emptyset\}$,
2. $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
3. $(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A$.

Aufgabe 14
Seien A und B beliebige Teilmengen von $\{0,1\}^*$. Welche der folgenden Gleichungen sind richtig, welche sind falsch? Beweisen Sie Ihre Aussage!

1. $A^+ \subseteq A^*$,
2. $(A \cap B)^* \supseteq (A^* \cap B^*)$,
3. $(A \cdot B)^* = (B \cdot A)^*$.

Aufgabe 15
Auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ betrachten wir diem Relation R definiert durch:

$$iRj \quad :\Longleftrightarrow \quad (\forall k \in \mathbb{N} \,\mathrm{mit}\, k \,\mathrm{Primzahl}\colon k|i \Longrightarrow k|j)$$

Welche der folgenden eigenschaften besitzt R :reflexiv, symetrisch, asymetrisch, antisymetrisch, transitiv? Begründen Sie Ihre Antworten!

Aufgabe 16
Seien A eine beliebige Teilmenge von $\{0,1\}^*$. Zeigen Sie:

$$\lambda \in A^+ \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in A$$

Aufgabe 17
Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ gleichmächtig sind.