Effiziente Algorithmen I SS 15

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 0
Bereiten Sie die Vorlesungen gewissenhaft nach, führen Sie dabei ein Zeitprotokoll. Sollten Sie weniger Zeit für die Nachbereitung verbrauchen als die Vorlesung dauerte, so wiederholen Sie diesen Schritt nochmal.

Aufgabe 1
Sei g eine natürliche Zahl größer gleich 2.

1. Zeigen Sie, dass die Relation $(x = y) \bmod g$ eine Kongruenzrelation auf $(\mathbb{Z}, +)$ ist.
2. Sei $\mathbb{Z}_g := \mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$ die Menge der zugehörigen Äquivalenzklassen. Hierauf seien $+$ und $\cdot$ kanonisch definiert. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/g\mathbb{Z}, +, \cdot)$ einen kommutativen Ring mit Eins bildet.
3. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_g, +, \cdot)$ nicht nullteilerfrei ist, falls g keine Primzahl ist.

Aufgabe 2
Gegeben seien m n-Bitzahlen $a_1, \ldots, a_m$ aus $\mathbb{N}$ sowie die n-Bitzahl $b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$. Geben Sie ein Verfahren an, das in $\mathcal{O}(n)$ Platz $(\prod_{i=1}^{m} a_i) \bmod b$ bestimmt.

Aufgabe 3
Recherchieren Sie Ausage und Beweis des *Chinesischen Restsatzes*.

Aufgabe 4 (kleinster Nichtteiler)
Wir definieren:

$$\mathrm{kN}(n) := \min\{t \in \mathbb{N} \mid t > 1\ ,\ t \text{ teilt } n \text{ nicht}\}$$
$$\mathrm{gkN}(n) := \max\{\mathrm{kN}(\nu) \mid \nu \in \{1, \ldots n\}\ \}$$

1. Erstellen Sie per Rechner eine möglichst grosse Tabelle mit den Spalten n, $\log(n)$, $\mathrm{kN}(n)$, $\mathrm{gkN}(n)$.
2. Tragen Sie die Werte in ein Diagramm ein.
3. In welcher Größenordnung liegen die Funktionen $\mathrm{kN}(n)$, $\mathrm{gkN}(n)$?
4. Bestimmen Sie die Sprungstellen von gkN sowie die dort angenommenen Funktionswerte.
5. Zeigen Sie: $\mathrm{kN} \in \mathcal{O}(\log)$
6. Zeigen Sie: $\mathrm{kN} \in \Omega_\infty(\log)$
7. Zeigen Sie: $\mathrm{gkN} \in \Theta(\log)$

Verwenden Sie den Primzahlsatz, der besagt dass $\pi(n) \to \frac{n}{\ln n}$ für $n \to \infty$, wobei $\pi(n)$ die Anzahl der Primzahlen kleiner n ist (siehe `http://mathworld.wolfram.com/PrimeNumberTheorem.html` bzw. `http://de.wikipedia.org/wiki/Primzahlsatz`).

Hinweis: Sei p_i die i-te Primzahl. Betrachten Sie die Zahlen ($n \in \mathbb{N}$):

$$z_m = \prod_{p_i \leq n} p_i^{\lfloor \log_{p_i}(m) \rfloor}$$

Was ist deren kleinster Nichtteiler?

Aufgabe 5
Wir betrachten eine $(n\times n)$-Matrix A über dem Körper $(\{0,1\},\wedge,\vee)$. Sei $A^* := \sum_{i=0}^{\infty} A^i$. Geben Sie einen Algorithmus an, der A^* mit $\log n$ vielen Matrixmultiplikationen bestimmt.

Aufgabe 6
Sei $G=(N,T,S,P)$ eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform.

Auf $\mathcal{P}(N)$ definieren wir die Addition durch $A+B := A\cup B$ und die Multiplikation durch $A*B := \{X\in N \mid \exists Y\in A, \exists Z\in B : X\to YZ\in P\}$. Dazu definieren wir die Addition und Multiplikation von $(n\times n)$-Matrizen über $\mathcal{P}(N)$ auf kanonischem Weg.

Sei $w=a_1\cdots a_n$ ein Wort über T^+ und $M := (M_{i,j})_{i=1,\dots,n+1}, j=1,\dots,n+1$ mit

$$M_{i,j} := \begin{cases} \{X \mid x\to a_i\} & \text{für} \quad i=1,\dots,n \text{ und } j=i+1, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

und $M^+ = \sum_{i=0}^{\infty} M^i$, wobei $M^1 := M$ und $M^{i+1} = M * M^i$ für $i\in\mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$S\in M^+_{1,n+1} \iff w\in L(G)$$