Effiziente Algorithmen I SS 15

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 0
Bereiten Sie die Vorlesungen gewissenhaft nach, führen Sie dabei ein Zeitprotokoll. Sollten Sie weniger Zeit für die Nachbereitung verbrauchen als die Vorlesung dauerte, so wiederholen Sie diesen Schritt nochmal.

Aufgabe 1
Wir betrachten eine $(n \times n)$-Matrix A über dem Körper $(\{0,1\}, \wedge, \vee)$. Sei $A^* := \sum_{i=0}^{\infty} A^i$. Geben Sie einen Algorithmus an, der A^* mit $\log n$ vielen Matrixmultiplikationen bestimmt.

Aufgabe 2
$M(n)$ bezeichne den Aufwand um zwei $(n \times n)$-Matrizen miteinander zu multiplizieren und $S(n)$ bezeichne den Aufwand um eine $(n \times n)-$Matrix zu quadrieren. Zeigen Sie, dass Matrixmultiplikation und Matrixquadrierung bis auf einen konstanten Faktor den gleichen Aufwand haben, d.h., dass $M \in \mathcal{O}(S)$ und $S \in \mathcal{O}(M)$ gilt und somit $S \in \Theta(M)$ liegt.

Aufgabe 3
Sie haben in der Vorlesung die Matrix-Multiplikation nach Strassen gesehen, bei der die Zeilenanzahl jeweils halbiert wurde. Entwickeln sie einen Algorithmus, bei dem die Zeilenanzahl gedrittelt wird. (Führen Sie die Matrix-Multiplikation auf die Multiplikation von (3×3)-Matrizen zurück.) Schätzen sie die Laufzeit Ihres Algorithmus ab.

Aufgabe 4
Recherchieren Sie die Aussagen des Laplace'schen Entwicklungssatzes sowie der Cramersche Regel. Bestimmen Sie die Laufzeit eines Algorithmusses zum Lösen eines linearen $(n \times n)$-Gleichungssystems, der beide Konzepte umsetzt.

Aufgabe 5
Sei Σ ein endliches Alphabet sowie u und v Wörter in Σ^*. Zeigen Sie:

$$u \cdot v = v \cdot u \quad \Longrightarrow \quad \exists i, j \in \mathbb{N}\ \exists x \in \Sigma^* : u = x^i \wedge v = x^j$$

Aufgabe 6
Sei Σ ein endliches Alphabet sowie A, B Sprachen über Σ mit $\lambda \notin B$. Sei weiter $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache für die die folgende Gleichung gilt:

$$L = A \cdot L \cup B$$

Zeigen Sie, dass dann $L = A^* \cdot B$ gilt.

Aufgabe 7

Sei Σ ein endliches Alphabet, $n \in N$, für $i, j \in \{1, ..., n\}$ seien $A_{ij} \subseteq \Sigma^*$ λ-freie Sprachen sowie $B_j \subseteq \Sigma^*$ beliebige Sprachen. Zeigen Sie, dass das folgende Gleichungsystem eine eindeutige Familie $(L_i)_{i=1,...n}$ von Sprachen in Σ^* als Lösung hat.

$$L_i \quad = \quad \bigcup_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot L_j \quad \cup B_i \qquad\qquad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

Bestimmen Sie die Lösungssprachen explizit (Angabe eines entsprechendnen Verfahrens reicht).
Hinweis: Mit Hilfe der vorigen Aufgabe können Sie das Gleichungssystem in eine Dreiecksform bringen (Distributivität, etc. nutzen).

Aufgabe 8

Wir betrachten einen nichtdeterministischen finiten Automaten $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ mit der Zustandsmenge $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$. Dazu definieren wir die Sprachen

$$A_{ij} := \{x \in \Sigma \mid q_j \in \delta(q_i, x\} \qquad\qquad \text{für } i, j = 1, \ldots, n$$

sowie

$$B_i := \begin{cases} \{\lambda\} & \text{falls } q_i \in F \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases} \qquad\qquad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

und wir betrachten das Gleichungssystem.

$$L_i \quad = \quad \bigcup_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot L_j \quad \cup B_i \qquad\qquad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

Zeigen Sie:

1. Für $i = 1, \ldots, n$ gibt die Lösungskomponente L_i die Menge der Wörter an, die vom Zustand q_i aus akzeptiert werden.
2. Die Menge der Wörter an, die vom Zustand q_i aus akzeptiert werden, ist regulär.

Aufgabe 9

Bestimmen Sie eine möglichst günstige obere Schranke für die Länge eines regulären Ausdruckes, der die von einem nichtdeterministischen finiten Automaten mit n Zuständen erkannte Sprache repräsentiert.