Effiziente Algorithmen I SS 15

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 0
Bereiten Sie die Vorlesungen gewissenhaft nach, führen Sie dabei ein Zeitprotokoll. Sollten Sie weniger Zeit für die Nachbereitung verbrauchen als die Vorlesung dauerte, so wiederholen Sie diesen Schritt nochmal.

Aufgabe 1
Erstellen Sie eine Ausarbeitung zum Beweis des Master-Theorems. Führen Sie alle Schritte aus, auch die, bei denen in der Vorlesung angegeben wurde: ,,Beweis analog".

Aufgabe 2
Geben Sie für jeden der 3 Fälle im Master-Theorem einen konkreten Algoritmus an, so dass der jeweilige Fall in der Laufzeitanalyse genutzt werden kann.

Aufgabe 3
Lösen Sie die Rekurrenzgleichung $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$ mit den Startwerten $x_0 = 2$ und $x_1 = 7$.

Aufgabe 4
Lösen Sie die Rekurrenzgleichung $y_n = 6y_{n-1} - 9y_{n-2}$ mit den Startwerten $y_0 = 1$ und $y_1 = 6$.

Aufgabe 5
Seien c_1 und c_2 zwei reelle Zahlen. Die quadratische Gleichung $r^2 - c_1 r - c_2$ habe die beiden verschieden reellen Nullstellen r_1 und r_2. Wie betrachten die Rekurenzgleichung $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2}$ für $n \geq 2$ mit festen Startwerten a_0 und a_1 in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es Konstanten $\alpha_1$und α_2 in $\mathbb{R}$ gibt, so dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \alpha_1 \cdot r_1^n + \alpha_2 \cdot r_2^n$$

eine Lösung dieser Rekurrenzgleichung ist.

Hinweis: a_0 und a_1 legen ein (lösbares?) lineares Gleichungssystem fest, das die Bestimmung der Konstanten α_1 und α_2 ermöglicht. Dass die $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann die Rekurenzgleichung erfüllen, kann dann durch Induktion nachgewiesen werden, wobei im Induktionsschritt die obige quadratische Gleichung benutzt wird.

Aufgabe 6
Seien c_1 und c_2 zwei reelle Zahlen mit $c_2 \neq 0$. Die quadratische Gleichung $r^2 - c_1 r - c_2$ habe genau eine reelle Nullstelle r_0. Wir betrachten die Rekurrenzgleichung $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2}$ für $n \geq 2$ mit festen Startwerten a_0 und a_1 in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es Konstanten α_1 und α_2 in $\mathbb{R}$ gibt, so dass: die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \alpha_1 \cdot r_0^n + \alpha_2 \cdot n \cdot r_0^n$$

eine Lösung dieser Rekurrenzgleichung ist.

Aufgabe 7
Gegeben sei die folgende Rekursionsungleichung:

$$T(n) \leq \sum_{k=n/2}^{n-1} T(k) + \mathcal{O}(1)$$

Beweisen Sie, dass dann $T(n) \leq c \cdot n$ für geeignetes c gilt.

Aufgabe 8

Sei $B = (V, E)$ ein (gerichteter) binärer Baum mit Wurzel w. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. Die Höhe des Baumes B beträgt mindestens $\log |V|$.
2. Die Höhe des Baumes B beträgt höchstens $\log |V|$.
3. Mindestens $\frac{|V|}{2}$ Knoten des Baumes B sind Blätter.
4. Höchstens $\frac{|V|}{2}+1$ Knoten des Baumes B sind Blätter.

Aufgabe 9

Beweisne Sie die folgenden Aussagen:

$$\begin{array}{lllll} 1. & f \in \mathcal{o}g) & \iff & 0 = & \sup \frac{f}{g} \\ 2. & f \in \mathcal{O}(g) & \iff & & \sup \frac{f}{g} & < \infty \\ 3. & f \in \Omega(g) & \iff & 0 < & \sup \frac{f}{g} \\ 4. & f \in \Theta(g) & \iff & 0 < & \sup \frac{f}{g} & < \infty \end{array}$$

Hierbei steht $\sup \frac{f}{g}$ für $\limsup_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = x$.