

Effiziente Algorithmen I SS 15

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1

Besorgen Sie sich die Definition der Landau-Symbole \mathcal{O} - bzw. \mathfrak{o} sowie von Θ und Ω aus der Literatur.

Aufgabe 2

Sei $H(n) := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ die sogenannte n -te Harmonische Zahl. Zeigen Sie, dass $H(n) = \ln(n) + \Theta(1)$.

Hinweis: Dazu kann $H(n)$ einmal als Riemann-Obersumme und einmal als Untersumme zum Integral $\int_1^n \frac{1}{x} dx$ gedeutet werden.

Aufgabe 3

Wir betrachten die Rekursionsgleichung $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n - 1$ mit den Startwerten $T(1) = 0$ und $T(2) = 1$. Zeigen Sie per Induktion, dass es ein $c \in \mathbb{N}$ gibt mit $T(n) \leq c \cdot n \cdot \log n$.

Aufgabe 4

Wir betrachten die Fibonacci-Folge f_0, f_1, f_2, \dots definiert durch das rekursive Bildungsgesetz $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$ und den Anfangswerten $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$. Beweisen Sie per Induktion:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Aufgabe 5

Schlagen Sie die Regel von (de) L'Hôpital nach.

Aufgabe 6

Ordnen Sie folgende Funktionen nach ihren Wachstumseigenschaften:

$\log n$, $\sqrt{\log n}$, \sqrt{n} , $(\log \sqrt{n})^2$, $\frac{n}{\log n}$, n^2 , n^k (für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$), $n^{\log n}$, $n^{\log \log n}$, $\log(n^2)$, $(\log n)^2$, n^n , $\log \log \log n$, $\sum_{i=0}^n i$, $\sum_{i=0}^n i^2$, $2^{n \log n}$, $(\sqrt{\log n})^{\log \log n}$.

Beweisen Sie jeweils die entsprechenden \mathcal{O} - bzw. \mathfrak{o} -Beziehungen.

Aufgabe 7

Geben Sie Funktionen f und g (von \mathbb{N} nach \mathbb{N}) an, so dass weder $f = \mathcal{O}(g)$ noch $g = \mathcal{O}(f)$. Beweisen Sie diese Eigenschaften.

Aufgabe 8

Zeigen Sie:

$$\mathcal{O}(\log) = \mathcal{O}(\log_{10}) = \mathcal{O}(\ln) = \mathcal{O}(\log(2n)) = \mathcal{O}(\log(n + \log(n))) = \mathcal{O}(\log(n^2))$$

Aufgabe 9

Welche \mathcal{O} - bzw. \mathcal{o} -Beziehungen gibt es zwischen den folgenden Funktionen?

$$f_1(n) := n^3$$

$$f_2(n) := \begin{cases} n^2 & , \text{ falls } n \text{ gerade} \\ n^4 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$f_3(n) := \begin{cases} n^5 & , \text{ falls } n \text{ gerade} \\ n^2 \cdot \log(n) & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$f_4(n) := \begin{cases} n^n & , \text{ falls } n \text{ gerade} \\ 2^{n \cdot \log(n)} \cdot \log(n) & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$f_5(n) := n!$$

Beweisen Sie die Eigenschaften.

Aufgabe 10

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(h) \implies f \in \mathcal{O}(h)$
2. $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{o}(h) \implies f \in \mathcal{o}(h)$
3. $f \in \mathcal{o}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(h) \implies f \in \mathcal{o}(h)$
4. Die Relation $R_{\mathcal{O}}$ definiert vermöge $(f, g) \in R_{\mathcal{O}} :\Leftrightarrow f \in \mathcal{O}(g)$ ist auf der Menge der totalen Funktionen von \mathbb{N} nach \mathbb{N} eine Äquivalenzrelation.
5. Die Relation $R_{\mathcal{O}}$ definiert durch $(f, g) \in R_{\mathcal{O}} :\Leftrightarrow f \in \mathcal{o}(g)$ ist auf der Menge der totalen Funktionen von \mathbb{N} nach \mathbb{N} eine Ordnungsrelation.

Aufgabe 11

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. $f \in \mathcal{O}(g) \setminus \mathcal{o}(g) \implies g \in \mathcal{O}(f)$
2. Es gibt Funktionen $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit: $f \notin \mathcal{O}(g)$ und $g \notin \mathcal{O}(f)$
3. $f \in \mathcal{O}(g) \setminus \mathcal{o}(g) \implies f \in \Omega(g)$