Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 9

Abgabetermin: 15.12.2014

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von:
- Aufgabe 1 und 2,
- Aufgabe 3, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 15, 16, 17, 18 und 19

Fragen zu den Aufgaben können auf `http://www.BTU-Forum.DE` in Unterforum "Theoretische Informatik, ..." gestellt werden.

Aufgabe 1

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

$$\begin{aligned} \text{Sei } L &:= \{w_1\#w_2\#w_3\cdots\#w_k\# \mid k\in\mathbb{N} \text{ gerade}, w_1\in\{a,b\}^+, \forall i\in\{1,\dots,k-1\} : w_i = \overleftarrow{w_{i+1}}\} \\ &= \{(w\#\overleftarrow{w}\#)^n \mid n\in\mathbb{N}, w\in\{a,b\}^+\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

1. L ist nicht kontextfrei,
2. L ist Schnitt zweier kontextfreier Sprachen L_1 und L_2,
3. Das Komplement von L ist eine kontextfreie Sprache.
   Hinweis: Geben Sie einen erkennenden NPDA an

Aufgabe 4

.Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$\text{REG} \subset \text{CFL} \subset \text{CSL}$$

Denken Sie daran, Zeugensprachen für die Echtheit der Inklusion anzugeben!

Aufgabe 5

Sei Σ ein Alphabet, L eine kontextfreie Sprache über Σ, R eine reguläre Sprache über Σ und h ein Homomorphismus von Σ^* nach Σ^*. Zeigen Sie:

1. $L \cap R$ ist kontextfrei,
2. $h(L)$ ist kontextfrei,
3. $h^{-1}(L)$ ist kontextfre

Aufgabe 6
Wir betrachten die *Dyck-Sprachen* $D_1 := L(G_1)$ und $D_2 := L(G_2)$, wo

$$\begin{aligned} G_1 &= (\{S\}, \{(,)\}, \{S \to SS, S \to \lambda, S \to (S)\}, S) \\ G_2 &= (\{S\}, \{(,),[,]\}, \{S \to SS, S \to \lambda, S \to (S), S \to [S]\}, S) \end{aligned}$$

1. Beschreiben Sie D_1 und D_2 umgangssprachlich.
   Siehe auch: `http://en.wikipedia.org/wiki/Dyck_language` (englische Version!).
2. Geben Sie erkennende Kellerautomaten für D_1 und D_2 an.
3. Geben Sie Homomorphismen g, h und eine reguläre Sprache R an, so dass $D_1 = h^{-1}(D_2 \cap R)$.
4. Geben Sie Homomorphismen g und h sowie eine reguläre Sprache R an, so dass $\{wc\overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^*\} = h^{-1}(D_2 \cap R)$ ist.

Aufgabe 7
Sei:
$$\begin{aligned} L_1 &:= \{a,d\}^* \cdot \{b,d\}^* \cdot \{c,d\}^* \\ L_2 &:= \{w \in L_1 \mid \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\} \\ L_3 &:= \{xyz \in L_1 \mid x, z \in \{a,b,c,d\}^* \wedge y \in \{ab, bc\}\} \\ L_4 &:= L_2 \cup L_3 \end{aligned}$$
Welche der Sprachen $L_1, \ldots, L_4$ besitzen die kontextfreie Pumping-Eigenschaft? Welche der Sprachen $L_1, \ldots, L_4$ sind kontextfrei?
Hinweis: Welche Rolle spielen die Zeichen d in den Sprachen $L_1, \ldots, L_4$?

Aufgabe 8
Sei $L_1 := \{a^n b^m c^k \mid n, m, k \in \mathbb{N}_0 \wedge (n = m)\}$, $L_2 := \{a^n b^m c^k \mid n, m, k \in \mathbb{N}_0 \wedge (m = k)\}$ und $L_3 := \{a^n b^m c^k \mid n, m, k \in \mathbb{N}_0 \wedge (n \neq m \vee m \neq k)\}$. Zeigen Sie:

1. L_1, L_2, L_3 und $L_1 \cup L_2$ sind kontextfrei.
2. $L_1 \cap L_2$ ist nicht kontextfrei (Hinweis: Zeigen Sie, dass $L_1 \cap L_2$ nicht kontextfrei pumpbar ist.)
3. $\overline{L_1 \cap L_2} = (\{a,b,c\}^* \setminus L(a^*b^*c^*)) \cup L_3$.
4. $\overline{L_1 \cap L_2}$ ist kontextfrei.
5. Die kontextfreien Sprachen sind nicht abgeschlossen unter Schnitt und Komplementbildung.

Aufgabe 9
Zu $L \subseteq \Sigma^*$ definieren wir
$$\begin{aligned} \mathrm{ANF}(L) &:= \{w \mid \exists v \in \Sigma^* \text{ mit } wv \in L\}, \\ \mathrm{END}(L) &:= \{w \mid \exists v \in \Sigma^* \text{ mit } vw \in L\}, \\ \mathrm{SUB}(L) &:= \{w \mid \exists v, u \in \Sigma^* \text{ mit } vwu \in L\}. \end{aligned}$$

1. Geben Sie ANF(L), END(L) und SUB(L) für folgende Sprachen L_i an ($i = 1, 2, 3$):
   $$L_1 := \{ab, aababb, \lambda\}, \quad L_2 := \{a^n b^n \mid n \in N\}, \quad L_3 := \{w\overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}.$$
2. Sei $M = (\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \{a,b,c\}, \delta, \{1\}, \{5,6\})$ ein nichtdeterministischer finiter Automaten, mit δ gegeben durch:

δ	1	2	3	4	5	6	7	8
a	$\{2\}$	$\{5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
b	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
c	$\emptyset$	$\{6\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{7\}$	$\{7,8\}$	$\{8\}$

   Geben Sie nichtdeterministische Automaten an, die ANF($L(M)$), END($L(M)$) und SUB($L(M)$) erkennen.
3. Zeigen Sie: Wird L von einem finiten Automat erkannt, so auch ANF(L), END(L) und SUB(L).
4. Zeigen Sie: Wird L von einer kontextfreien Grammatik erzeugt, so auch ANF(L), END(L) und SUB(L).

Aufgabe 10
Sei $L := \{a^n b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0 \wedge n \neq m\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

1. L hat nicht die reguläre Pumping-Eigenschaft.
2. L hat die kontextfreie Pumping-Eigenschaft.

Hinweis: L ist nicht kontextfrei. Dies kann mit Hilfe von Ogdens Lemma nachgewiesen werden, gute Studierende können den Beweis versuchen. Die Anwendung von Ogdens Lemma ist nicht wesentlich schwieriger als die Anwendung des Pumping Lemmas. (Zu Ogdens Lemma siehe `http://en.wikipedia.org/wiki/Ogden%27s_lemma`, bzw. William Ogden: A Helpful Result for Proving Inherent Ambiguity, Mathematical Systems Theory, 2(3), pp. 191-194, 1968. Link

Bei den nächsten Aufgaben betrachten wir nichtdeterministische Kellerauitomaten, die mit dem Bottom-Symbol auf dem Keller starten und die mit leerem Keller akzeptieren.

Aufgabe 11
Wir betrachten den Pushdown-Automaten
$$P = (\{s\}, \{\langle, \rangle, [,]\}, \{A, B, C, D, S, \perp\}, \delta, s, \{s\})$$
an, mit: $\delta = \{ \quad (s, \lambda, \perp, s, S), (s, \lambda, S, s, ASB), , (s, \lambda, S, s, CSD), , (s, \lambda, S, s, SS), , (s, \lambda, S, s, \lambda)$
$(s, \langle, A, s, \lambda), (s, \rangle, B, s, \lambda), (s, [, C, s, \lambda), (s,], D, s, \lambda) \quad \}$
[Der Automat startet mit der Kellerinschrift $\perp$.]

1. Geben Sie einen Lauf von P auf dem Wort $w = \langle\langle[[\,]]\,[\,]\rangle\langle[][\,]\rangle\rangle$ an.
2. Bestimmen Sie die von P erkannte Sprache.
3. Konstruieren Sie zu P eine Grammatik G, die die Sprache $L(P)$ erzeugt. Wenden Sie dabei das in der Vorlesung beschriebene Verfahren an. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise!
4. Geben Sie für das Wort $w = \langle\langle[[\,]]\,[\,]\rangle\langle[][\,]\rangle\rangle$ einen Ableitungsbaum bezüglich der konstruierten Grammatik G an.

Aufgabe 12
Wir betrachten den Pushdown-Automaten
$$P = (\{s, 0, 1, 2, 3\}, \{a, b, c\}, \{\perp\}, \delta, s, \{0, 1, 2\})$$
an, mit:
$$\delta = \{ \quad (s, \lambda, \perp, 0, \perp), (0, a, \perp, 0, \perp), (1, a, \perp, 1, \perp), (2, a, \perp, 2, \perp), (3, a, \perp, 3, \perp),$$
$$(0, b, \perp, 1, \perp), (1, b, \perp, 2, \perp), (2, b, \perp, 3, \perp), (3, b, \perp, 0, \perp)\ , (0, c, \perp, 0, \lambda) \quad \}$$

1. Bestimmen Sie die von P erkannte Sprache.
2. Konstruieren Sie zu P einen äquivalenten nichtdeterministischen Pushdown-Automaten, der eine einelementige Zustandsmenge hat.
3. Konstruieren Sie zu P eine Grammatik G, die die Sprache $L(P)$ erzeugt. Wenden Sie dabei das in der Vorlesung beschriebene Verfahren an. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 13
Wir betrachten den Pushdown-Automaten
$$P = (\{s, 0, 1, 2, 3, 4\}, \{a, b, c, d\}, \{\perp\}, \delta, s, \{0, 1, 2\})$$
an, mit:
$$\delta = \{ \quad (s, c, \perp, s, \perp\perp), (s, d, \perp, 0, \perp), (0, a, \perp, 0, \perp), (1, a, \perp, 1, \lambda), (2, a, \perp, 2, \lambda),$$
$$(0, b, \perp, 1, \lambda), (1, b, \perp, 2, \lambda), (2, b, \perp, 0, \lambda), (0, d, \perp, 4, \lambda) \quad \}$$

1. Bestimmen Sie die von P erkannte Sprache.
2. Konstruieren Sie zu P einen äquivalenten nichtdeterministischen Pushdown-Automaten, der eine einelementige Zustandsmenge hat.
3. Konstruieren Sie zu P eine Grammatik G, die die Sprache $L(P)$ erzeugt. Wenden Sie dabei das in der Vorlesung beschriebene Verfahren an. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 14
Wir betrachten den Pushdown-Automaten

$$P = (\{s, 0, 1, 2\}, \{a, b\}, \{A, B, \perp\}, \delta, s, \{0, 1, 2\})$$

an, mit:

$$\delta = \{ \quad (s, \lambda, \perp, 0, A\perp), (0, a, A, 0, AA), (0, \lambda, A, 1, B), (1, a, B, 1, BBB), \\ (1, b, B, 1, \lambda), (1, b, B, 2, \lambda), (2, a, B, 2, \lambda), (2, a, A, 2, \lambda), (2, \lambda, \perp, 2, \lambda) \quad \}$$

1. Geben Sie einen Lauf von P auf dem Wort $w = aaaabbbbaaa$ an.
2. Bestimmen Sie die von P erkannte Sprache.
3. Konstruieren Sie zu P einen äquivalenten nichtdeterministischen Pushdown-Automaten, der eine einelementige Zustandsmenge hat.
4. Konstruieren Sie zu P eine Grammatik G, die die Sprache $L(P)$ erzeugt. Wenden Sie dabei das in der Vorlesung beschriebene Verfahren an. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise!
5. Geben Sie für das Wort $w = aaaabbbbaaa$ einen Ableitungsbaum bezüglich der konstruierten Grammatik G an.

Aufgabe 15
Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeichnen Sie das Venn-Diagramm mit folgenden Sprachmengen:

$P(\Sigma^*)$	alle Sprachen über Σ
REG	reguläre Sprachen über Σ
CFL	kontextfreie Sprachen über Σ
$\mathcal{A}_3$	Sprachen über Σ mit regulärer Pumping Eigenschaft
$\mathcal{A}_2$	Sprachen über Σ mit kontextfreier Pumping Eigenschaft

Tragen Sie überall eine Sprache ein, die im jeweiligen Bereich liegt, begründen Sie Ihre Eintragungen.
Bemerkung: Sie dürfen alle Sprachen aus dem Übungsblatt verwenden.

Aufgabe 16
Sei $L := \{w \in \{a, b\}^* \mid bb$ ist Teilwort von w, oder $\#_a(w)$ ist Primzahl, oder $\#_b(w) = 0\}$. Zeigen Sie, dass L die kontextfreie Pumping-eigenschaft hat, aber nicht kontextfrei ist.

Aufgabe 17
Sei Σ ein endliches Alphabet. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen..

1. Jede Sprache, die die kontextfreie Pumping-Eigenschaft hat ist kontextfrei.
2. Ist L $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei und h ein Worthomomorphismus von Σ^* nach Σ^*, so sind $h(L)$ und $h^{-1}(L)$ auch kontextfrei.
3. $\exists L \in \text{CFL} : \overline{L} \in \text{CFL}$
4. $\exists L \in \text{CFL} : \overline{L} \notin \text{CFL}$
5. $\forall L \in \text{CFL} : \overline{L} \notin \text{CFL}$
6. Es gibt eine kontextfreie Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenz R_L einen unendlichen Index hat.
7. Es gibt eine kontextfreie Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenz R_L einen endlichen Index hat.
8. Es gibt eine kontextfreie, nicht-reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenz R_L einen endlichen Index hat.
9. Ist eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei und nicht-regulär, so ist sie unendlich.
10. Ist $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei und $L' \subseteq \Sigma^*$ nicht-regulär, so ist auch $L \cup L'$ nicht-regulär.
11. Sind $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei und $L' \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei, so ist auch $L \cup L'$ kontextfrei.

Aufgabe 18

Skizzieren Sie ein Verfahren, das bei Eingabe (der Beschreibung) einer kontextfreien Grammatik G entscheidet, ob $L(G)$ leer beziehungsweise endlich beziehungsweise unendlich ist, d. h. das "0" ausgibt, falls $L(G) = \emptyset$, "E" ausgibt, falls $0 < |L(G)| < \infty$ und "U" ausgibt, falls $|L(G)| = \infty$.

Aufgabe 19

Sei Σ ein Alphabet mit $|\Sigma| \geq 2$. Wir definieren den Operator $\mathcal{D}$, der einer Sprache L die Sprache $\mathcal{D}(L)$ zuordnet vermöge:

$$\mathcal{D}(L) := \{w \cdot w \mid w \in L\}$$

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussage.

1. Ist L kontextfrei, so ist auch $\mathcal{D}(L)$ kontextfrei.
2. Ist L regulär, so ist $\mathcal{D}(L)$ kontextfrei.
3. Ist $L = \overleftarrow{L}$ und L regulär, so ist $\mathcal{D}(L)$ kontextfrei.