Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 4

Abgabetermin: 10.11.2014

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von:
- Aufgabe 1 und 2,
- Aufgabe 3, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 21, 22 und 23

Fragen zu den Aufgaben können auf `http://www.BTU-Forum.DE` in Unterforum "Theoretische Informatik, ..." gestellt werden.

Aufgabe 1

Bereiten Sie die Zwischenklausur vom 14.11.2014 gewissenhaft vor. Lernen Sie also die Definitionen so, dass Sie die Definitionen aufschreiben können. Es sind keine Hilfsmittel (Skripte, Bücher, Aufzeichnungen, Spickzettel, Handys, Taschenrechner, programmierbare Armbanduhren, etc.) in der Klausur erlaubt, nur weißes Papier und Kugelschreiber (und das ist selber mitzubringen!). Sie dürfen weder Jacken, Mäntel noch Taschen an Ihren Platz mitnehmen. Es werden Ihnen Plätze zugeordnet. Bitte bringen Sie einen Lichtbildausweis und Ihren Studentenausweis zur Klausur mit.

Schreiben Sie bitte mit Kugelschreiber und nicht mit Bleistift. Beginnen Sie in der Klausur jede Aufgabe auf einer neuen Seite und heften die Blätter am Ende in der Reihenfolge der Aufgaben ab. Wir werden Hefter mitbringen.

Aufgabe 2

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 3

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 4

Sei L eine reguläre Sprache über dem Alphabet Σ. Zeigen Sie:

$$\exists k \in N \;\; \forall A \in \mathcal{P}(L) \,\text{mit}\, |A| > k \;\; \exists w, w' \in A \;\; \exists x, x', y, y' \in \Sigma^* \;\; \text{so, dass}$$
$$w \neq w' \;\wedge\; w = x \cdot y \wedge w' = x' \cdot y' \;\wedge\; |x| = \lfloor |w|/2 \rfloor \;\wedge\; |x'| = \lfloor w'|/2 \rfloor \;\wedge\; x \cdot y' \in L \wedge x' \cdot y \in L$$

Hinweis: Betrachten Sie die Läufe eines erkennenden DFA. $\mathcal{P}(L)$ bezeichnet die Potenzmenge von L.

Aufgabe 5

Sei $L := \{a^n b^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie:

1. Die Wörter aus $\{a\}^*$ sind paarweise nicht äquivalent (bzgl. $\approx_L$).
2. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $[a^i] = \{a^i\}$.
3. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $[a^{i+1} b^{2i+3}] = \{a^j b^l \mid j, l \in N \wedge l > 0 \wedge 3j - l = i\}$.
4. $\Sigma^* / \approx_L = \; \big\{\{a^i\} \mid i \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{[a^{i+1} b^{2i+3}] \mid i \in \mathbb{N}\big\} \cup \{[b]\}$.

Hinweis: $\Sigma^* / \approx_L$ bezeichnet die Menge aller Äquivalenzklassen von $\approx_L$ auf Σ^*.

Aufgabe 6
Zeigen Sie mit Hilfe der vorhergehenden Aufgabe, dass die Sprachen $L_{\text{PAL}} := \{w \cdot \overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ und $L_{\text{Copy}} := \{w \cdot w \mid w \in \{a,b\}^*\}$ nicht regulär sind.

Aufgabe 7
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Geben Sie jeweils alle Klassen der zu folgenden Sprachen gehörenden Relationen an:

$$\begin{array}{lcl} L_0 & := & \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_1 & := & \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_2 & = & \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{array}$$

Aufgabe 8
Sei $n_0 := 0$ und $n_{i+1} := n_i + 2i + 1$ für $i \in \mathbb{N}$, weiter sei $Q := \{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Wir betrachten die Sprache $L := \{a^j \mid j \in Q\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a\}$, sowie die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$. Zeigen Sie:

1. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $[a^i] = \{a^i\}$.
2. $\Sigma^* / \approx_L = \big\{\{a^i\} \mid i \in \mathbb{N}\big\}$.
3. $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 9
Wir betrachten das Alphabet $\Sigma = \{a\}$. Geben Sie jeweils alle Klassen der zu folgenden Sprachen gehörenden Relationen an:

$$\begin{array}{lcl} L_{21} & := & \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n < 5\} \\ L_{22} & := & \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_{23} & := & \{a^p \mid p \in \mathbb{N} \wedge p \text{ ist Primzahl}\} \\ L_{24} & := & \{a^{(2^n)} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_{25} & := & \{(a^2)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{array}$$

Aufgabe 10
Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen die reguläre Pumping-Eigenschaft haben, jedoch nicht regulär sind.

$L_2 := \{w \in \{a,b,c\}^* \mid aa, ab, ba \text{ oder } bb \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } w \text{ enthält genau so viele } a\text{'s wie } b\text{'s}\}$
$L_3 := \{w \in \{a,b\}^* \mid aa \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } bb \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } |w| \text{ ist eine Quadratzahl}\}$
$L_4 := L((a \cup b)^* \cdot (aa \cup bb) \cdot (a \cup b)^*) \;\cup\; \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist Primzahl}\}$

Hinweis: Zeigen Sie, dass die zur Sprache gehörende Relation jeweils unendlich viele Klassen hat.

Aufgabe 11
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet, $\alpha = (a \cup aba)^* \cdot a$ ein regulärer Ausdruck über Σ und $L = \mathcal{L}(\alpha)$. Konstruieren Sie ein λ-NFA zu L, einen DFA zu L, einen DFA zu $\overline{L} := \Sigma^* \setminus L$ sowie einen regulären Ausdruck zu $\overline{L}$. Beschreiben Sie das Konstruktionsverfahren.

Aufgabe 12
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$, A und B vollständige deterministische finite Automaten, $\sim_A$ und $\sim_B$ die zu den Automaten gehörenden Rechtskongruenzrelationen, $\approx_{L(A)}$ und $\approx_{L(B)}$ die zu den erkannten Sprachen gehörenden Rechtskongruenzrelationen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. $L(A) = L(B) \implies \sim_A = \sim_B$.
2. $L(A) = L(B) \implies \approx_{L(A)} = \approx_{L(B)}$.
3. $\approx_{L(A)} \supseteq \sim_A$.

Aufgabe 13

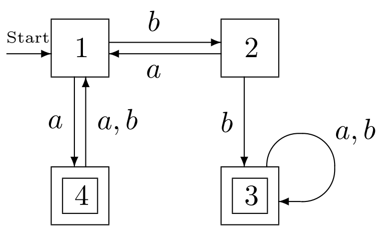
Sei $\Sigma = \{a, b\}$, $\$ \notin \Sigma$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gibt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ nur unendlich grosse Klassen hat.
2. Es gibt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ nur endlich grosse Klassen hat und L von einem deterministischen finiten Automaten erkannt wird.
3. Wird L von einem DFA erkannt, so auch jede Teilmenge $L' \subseteq L$.
4. Werden L und L' von DFA erkannt, so auch $(\{a\} \cdot L) \cup (\{b\} \cdot L')$.
5. Wird L von einem DFA erkannt und wird L' von keinem DFA erkannt, so wird $L \cup L'$ auch von keinem DFA erkannt.
6. Ist $\{\$\} \cdot L$ regulär, so ist auch L regulär.
7. Jede endliche Sprache ist regulär.
8. Ist $L \cup L'$ regulär, so sind auch L und L' regulär.
9. Sind für $i \in \mathbb{N}$ die Sprachen L_i alle regulär, so ist $\cup_{i \in \mathbb{N}} L_i$ auch regulär.
10. Sind für $i \in \mathbb{N}$ die Sprachen L_i alle endlich, so ist $\cup_{i \in \mathbb{N}} L_i$ auch endlich.

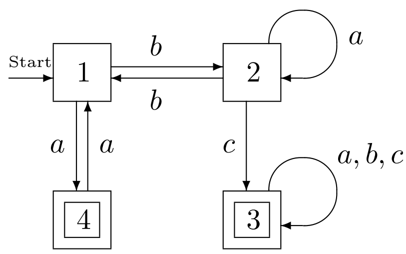
Aufgabe 14

Gegeben seien die folgenden finiten Automaten (der Startzustand s ist durch “Start” gekennzeichnet, die akzeptierenden Zustände durch die doppelte Einrahmung). Wir betrachten die zu den Automaten gehörende Rechtskongruenzrelationen $\sim_M$. Wieviele Klassen haben diese Äquivalenzrelationen. Beschreiben Sie die einzelnen Klassen jeweils durch reguläre Ausdrücke.

M_1 (mit $\Sigma_1 = \{a, b\}$)



M_2 (mit $\Sigma_2 = \{a, b, c\}$)



Die Automaten erkennen Sprachen. Zu diesen Sprachen gehören wiederum Rechtskongruenzrelationen. Geben Sie an, wieviele Klassen die entsprechenden Relationen jeweils haben, und beschreiben Sie die einzelnen Klassen jeweils durch reguläre Ausdrücke!

Aufgabe 15

Erkennen die beiden finiten Automaten $M_1 = (\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \{a, b\}, \delta_1, 0, \{4, 5, 6\})$ und $M_2 = (\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \{a, b\}, \delta_2, 0, \{2, 5\})$ die gleiche Sprache? δ_1 und δ_2 sind gegeben durch:

δ_1	a	b
0	2	1
1	2	3
2	4	7
3	2	3
4	0	5
5	1	6
6	0	5
7	5	2

δ_2	a	b
0	1	3
1	2	6
2	3	2
3	4	0
4	5	7
5	0	5
6	2	1
7	5	7

Begründen Sie Ihre Antwort. **Hinweis:** Konstruieren Sie zunächst die minimalen DFA.

Aufgabe 16
Gegeben sei der folgende λ-NFA $M = (\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}\,\{a,b\}, \delta, 1, \{2,3,9,8,10\})$.

δ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	$\{3\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{5\}$	$\{6,4\}$	$\emptyset$	$\{4,5\}$	$\{9,10\}$	$\{8\}$	$\{8\}$
b	$\emptyset$	$\{4\}$	$\{7\}$	$\{8\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{9\}$	$\{1\}$	$\{3\}$	$\{2\}$
λ	$\{2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{7\}$	$\{7\}$	$\{4\}$	$\emptyset$	$\{8\}$	$\emptyset$

Beschreiben Sie alle Klassen der zu $L(M)$ gehörenden Rechtskongruenzrelation $\approx_{L(M)}$.
Hinweis: Konstruieren Sie zunächst einen äquivalenten DFA.

Aufgabe 17
Welche Sprachen werden von den folgenden finiten Automaten A_k und B_k mit $k \in \mathbb{N}$ erkannt?

$$A_k := (\{0,\ldots,k\}\,,\,\{a,b\}\,,\,0\,,\,\Delta_k\,,\,\{k\}) \text{ und}$$
$$B_k := (\{a,b\}^k\,,\,\{a,b\}\,,\,b^k\,,\,\Delta'_k\,,\,\{a\}\cdot\{a,b\}^{k-1})$$

wobei:

$$\Delta_k := \{(0,a,0),(0,b,0),(0,a,1)\} \;\cup\; \{(i,x,i{+}1) \mid i \in \{1,\ldots,k-1\} \wedge x \in \{a,b\}\}$$
$$\Delta'_k := \{(xw,y,wy) \;\mid x,y \in \{a,b\} \wedge w \in \{a,b\}^{k-1}\}$$

Aufgabe 18
Sei $L_k := \{w \in \{a,b\}^+ \mid \text{das } k\text{-letzte Zeichen von } w \text{ ist } a\}$ für $k \in N \setminus \{0\}$. Zeigen Sie für jedes $k \in N \setminus \{0\}$:

1. Es gibt einen NFA mit $k+1$ Zuständen, der L_k erkennt.
2. Kein vollständiger DFA mit weniger als 2^k Zustände erkennt L_k.
   Hinweis: Denken Sie an die zu L_k gehörende Relation $\approx_{L_k}$.
3. Es gibt einen vollständigen DFA mit 2^k Zuständen, der L_k erkennt.

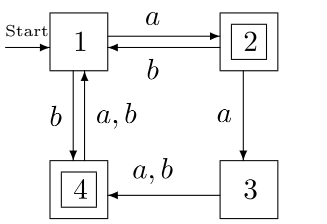
Aufgabe 19
Sei $\Sigma = \{a\}$ ein einelementiges Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie: Entweder wird L von einem deterministischen finiten Automaten erkannt oder alle Klassen der zu L gehörenden Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ sind einelementig.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: $\forall p,q \in \mathbb{N} : a^p \;\approx_L\; a^{p+q} \implies \{a^{p+iq} \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq [a^p]_{\approx_L}$

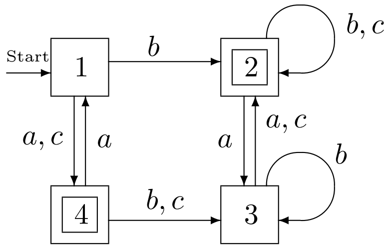
Aufgabe 20 (für gute Studierende)
Sei $\Sigma = \{a\}$ ein einelementiges Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache über $\Sigma = \{a\}$. Zeigen Sie, dass L^* regulär ist.

Aufgabe 21
Gleiche Aufgabenstellung wie in Aufgabe 14, jedoch mit den Automaten M_3 und M_4.

M_3 (mit $\Sigma_3 = \{a, b\}$)



M_4 (mit $\Sigma_4 = \{a, b, c\}$)



Aufgabe 22
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$, A und B vollständige deterministische finite Automaten, $\sim_A$ und $\sim_B$ die zu den Automaten gehörenden Rechtskongruenzrelationen, $\approx_{L(A)}$ und $\approx_{L(B)}$ die zu den erkannten Sprachen gehörenden Rechtskongruenzrelationen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. $L(A) \subseteq L(B) \implies \sim_A \subseteq \sim_B$
2. $\approx_{L(A)} \subseteq \approx_{L(B)} \implies \sim_A \subseteq \sim_B$

Aufgabe 23
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet, $\$ \notin \Sigma$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. Es gibt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ nur endlich grosse Klassen hat
2. Zu jedem $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es eine Sprache $L_n \subseteq \Sigma^*$ so dass der Index (d.h. die Anzahl der Äquivalenzklassen) der zu L_n gehörenden Rechtskongruenzrelation $\approx_{L_n}$ genau n ist.
3. Zu jeder Sprache L die von einem DFA A erkannt wird, gibt es unendlich viele weitere DFA, die die gleiche Sprache erkennen und deren Zustandsanzahlen alle verschieden sind.
4. Wird L von einem DFA erkannt, so auch jede Teilsprache L' mit $L' \subseteq L \subseteq \Sigma^*$.
5. Ist $L \cap L'$ nicht-regulär, so sind weder L noch L' regulär.
6. Wird L von einem vollständigen DFA mit p Zuständen erkannt und L' von einem vollständigen DFA mit q Zuständen erkannt, so gibt es vollständige DFAs mit pq Zuständen die $L \cup L'$ bzw. $L \cap L'$ erkennen,.
7. Sind für $i \in \mathbb{N}$ die Sprachen L_i alle regulär, so ist $\cup_{i \in \mathbb{N}} L_i$ auch regulär.