

Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 14

Abgabetermin: 02.02.2015

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von: – Aufgabe 1,
– Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
– Aufgaben 8, 9, 10 und 11

Fragen zu den Aufgaben können auf <http://www.BTU-Forum.DE> in Unterforum “Theoretische Informatik, ...” gestellt werden.

Definitionen:

$L \leq_m^{\text{poly}} L' \iff L$ (**many-one**) **polynomial** **reduzierbar** auf L'
 $:\iff \exists f : \Sigma_L^* \rightarrow \Sigma_{L'}^*$ total und polynomialzeit-berechenbar mit $(w \in L \iff f(w) \in L')$
 $L \equiv_m^{\text{poly}} L' :\iff (L \leq_m^{\text{poly}} L' \wedge L' \leq_m^{\text{poly}} L)$

Für eine Sprachklasse \mathcal{L} heisst eine Sprache A **\mathcal{L} -vollständig** bzgl. der Reduktion \leq_m^{poly} genau dann, wenn $A \in \mathcal{L}$ und $\forall L \in \mathcal{L} : L \leq_m^{\text{poly}} A$.

$\text{NPC} := \{L \in \text{NP} \mid L \text{ ist NP-vollständig bzgl. der Reduktion } \leq_m^{\text{poly}}\}$

Aufgabe 1

Wir betrachten die folgenden Sprachen L_1 und L_2 ($\text{bin}(n)$ bezeichnet die Binärdarstellung von n , niederwertigste Bits hinten, ohne führende Nullen):

$$L_1 := \{a^n c a^m c a^k \mid n, m, k \in \mathbb{N} \wedge k = n \cdot m\}$$

$$L_2 := \{\text{bin}(n) c \text{bin}(m) c \text{bin}(k) \mid n, m, k \in \mathbb{N} \wedge k = n \cdot m\}$$

Zu L_1 und L_2 betrachten wir die im Folgenden kurz beschriebenen Turing-Maschinen M_1 und M_2 , welche L_1 und L_2 entscheiden: im Wesentlichen subtrahieren die Turing-Maschinen n m -mal vom Startwert k ; wird dadurch genau 0 erreicht, so wird akzeptiert ansonsten verworfen. (Natürlich müssen M_1 und M_2 auch prüfen, dass die Eingabe die korrekte Form hat.)

1. Wird durch die Turing-Maschinen M_1 und M_2 bezeugt, dass L_1 und L_2 in P liegen?
2. Liegen L_1 und L_2 in P?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 2

Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0, 1\}^*$)

1. $(A \leq_m^{\text{poly}} B) \implies (A \leq_m B)$
2. $(A \leq_m^{\text{poly}} B \wedge B \in \text{P}) \implies A \in \text{P}$
3. $(A \leq_m^{\text{poly}} B \wedge A \notin \text{NP}) \implies B \notin \text{NP}$.
4. $(A \in \text{P} \text{ entscheidbar}, B \neq \emptyset, B \neq \{0, 1\}^*, \text{ dann ist } A \leq_m^{\text{poly}} B)$.
5. $(A \text{ NP-vollständig} \wedge A \in \text{P}) \implies (\text{P} = \text{NP})$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen in P liegen:

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_2 &:= \{a^n \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = m^2\} \\ L_3 &:= \{\text{bin}(n) \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = m^2\} \\ L_4 &:= \{a^n \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = 2^m\} \\ L_5 &:= \{\text{bin}(n) \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = 2^m\} \\ L_6 &:= \{wcvcu \mid w, v, u \in \{a, b\}^* \wedge (w = v \vee w = u)\} \\ L_7 &:= \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0, 1\}^*$, vollständig jeweils bezüglich \leq_m^{poly})

1. (A NP-vollständig und $A \leq_m^{\text{poly}} B$ und $B \in \text{NP} \implies B$ NP-vollständig.
2. Keine nichtentscheidbare Sprache ist NP-vollständig.
3. Jede nicht-triviale Sprache in P ist P-vollständig.

Aufgabe 5

Welche der Eigenschaften “reflexiv”, “symmetrisch”, “antisymmetrisch”, “transitiv” haben die Relationen \leq_m^{poly} bzw. \equiv_m^{poly} auf der Menge aller Sprachen über dem Alphabet $\{0, 1\}^*$? Beweisen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 6

Wir betrachten die folgenden Sprachen L_1 und L_2 ($\text{bin}(n)$ bezeichnet die Binärdarstellung von n , niederwertigste Bits hinten, ohne führende Nullen)::

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{\text{bin}(n_0)c \dots c \text{bin}(n_k) \mid k \in \mathbb{N} \text{ und} \\ &\quad \forall i \in \{0, \dots, k\} : n_i \in \mathbb{N} \text{ und} \\ &\quad \exists J \subseteq \{1, \dots, k\} : \sum_{i \in J} n_i = n_0 \} \\ L_2 &:= \{\text{bin}(n_0)c \dots c \text{bin}(n_k) \mid k \in \mathbb{N} \text{ und} \\ &\quad \forall i \in \{0, \dots, k\} : n_i \in \mathbb{N} \text{ und} \\ &\quad \exists J \subseteq \{0, \dots, k\} : \sum_{i \in J} n_i = \sum_{i \in \{0, \dots, k\} \setminus J} n_i \} \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie: $L_1 \in \text{NP}$ und $L_2 \in \text{NP}$.
2. Zeigen Sie: $L_1 \equiv_m^{\text{poly}} L_2$.

Bemerkung: Sowohl L_1 als auch L_2 sind NP-vollständig (vgl. in der Literatur: Knapsack, Partition).

Aufgabe 7

Zeigen Sie:

1. $A \leq_m^{\text{poly}} B \iff \bar{A} \leq_m^{\text{poly}} \bar{B}$.
2. $(A \in \text{NPC} \wedge \text{NP} \neq \text{co-NP}) \implies (\{1\} \cdot A \cup \{2\} \cdot \bar{A} \notin \text{NP} \cup \text{co-NP})$.

Aufgabe 8

Zeigen Sie, dass die Klassen P und NP unter Vereinigung, Schnittbildung, Konkatenation und inverser Homomorphismus abgeschlossen sind.

Aufgabe 9

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0, 1\}^*$):

1. $\text{co-P} = \text{P}$.
2. $A \leq_m^{\text{poly}} B \implies B \leq_m^{\text{poly}} A$.
3. $(L \in \text{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\} \wedge L' \in \text{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\}) \implies L \equiv_m^{\text{poly}} L'$.
4. Auf der Menge aller Sprachen über dem Alphabet Σ ist die Relation \leq_m^{poly} antisymmetrisch.
5. $H := \{\langle u, v \rangle \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(v) \downarrow\} \in \text{P}$

Aufgabe 10

Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0, 1\}^*$)

1. $(A \leq_m^{\text{poly}} B \wedge B \in \text{NP}) \implies A \in \text{NP}$.
2. $(A \leq_m^{\text{poly}} B \wedge A \notin \text{P}) \implies B \notin \text{P}$.
3. $A \leq_m^{\text{poly}} B \iff \overline{A} \leq_m^{\text{poly}} \overline{B}$.
4. Sind A und B NP-vollständig, so gilt $A \equiv_m^{\text{poly}} B$.
5. $(\text{NPC} \cap \text{P} \neq \emptyset) \implies (\text{NP} = \text{P})$.
6. $(\text{P} = \text{NP}) \implies (\text{NPC} = \text{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\})$.

Aufgabe 11

Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm mit den folgenden Sprachklassen: CFL, P, NP, co-NP, REC und RE. Tragen Sie die Sprachen $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und H in dieses Venn-Diagramm ein.
