Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 12

Abgabetermin: 19.01.2015

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1 und 2,
- Aufgabe 3, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 22, 23, 24, 25 und 26

Fragen zu den Aufgaben können auf `http://www.BTU-Forum.DE` in Unterforum "Theoretische Informatik, ..." gestellt werden.

Definition:

$$\begin{aligned} L \leq_m L' &\iff L \text{ (many-one) reduzierbar auf } L' \\ &:\iff \exists\, f : \Sigma_L^* \to \Sigma_{L'}^* \text{ total und berechenbar mit} \\ &\qquad\qquad \forall w \in \Sigma_L^* : w \in L \iff f(w) \in L' \\ L \equiv_m L' &:\iff (L \leq_m L' \;\wedge\; L' \leq_m L) \end{aligned}$$

Definition: Für eine Sprachklasse $\mathcal{L}$ heisst eine Sprache A **$\mathcal{L}$-vollständig** bzgl. der Reduktion $\leq_m$ genau dann, wenn $A \in \mathcal{L}$ und $\forall L \in \mathcal{L} : L \leq_m A$.

Notation: Für eine Turing-Maschine M und ein Inputwort w bedeutet:

$M(w)\uparrow$	:	M angesetzt auf w stoppt nicht,
$M(w)\downarrow$	:	M angesetzt auf w stoppt,
$M(w)\downarrow v$	:	M angesetzt auf w stoppt mit Ausgabe v.
H	:=	$\{\langle u, v\rangle \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(v)\downarrow\}$
H_1	:=	$\{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u)\downarrow\}$

Aufgabe 1

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S, A, B, Z, T, E\}\ ,\ \{0, 1, 2, a, b\})\ ,\ S\ ,\ P)$ mit
$P = \{S \to 01Z,\ Z \to 2,\ Z \to BAE,\ aB \to Ba,\ 1B \to b1,\ aA \to BBAa,\ 1A \to 1T,\ Ta \to aT,\ TE \to aZ\}$.

1. Welche Sprache wird durch die Grammatik G erzeugt?
2. Ist die Sprache $L(G)$ kontextsensitiv?
3. Ist die Sprache $L(G)$ kontextfrei?
4. Geben Sie eine Turing-Maschine an, die $L(G)$ entscheidet.

Aufgabe 4
Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

1. L ist rekursiv aufzählbar.
2. L ist semi-entscheidbar.
3. $L = \text{Bild}(f)$ für eine totale injektive berechenbare Funktion $f : \{1\}^* \to \Sigma^*$ oder L ist endlich.
4. $L = \text{Bild}(f)$ für eine totale berechenbare Funktion $f : \{1\}^* \to \Sigma^*$ oder $L = \emptyset$.
5. $L = \text{Bild}(f)$ für eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$.
6. $L = \text{Def}(f)$ für eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$.
7. Die semi-charakteristische φ_L Funktion von L ist berechenbar.

Aufgabe 5
Geben Sie berechenbare Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 aus Σ^* nach Σ^* an, die folgende Eigenschaften haben:

1. $\text{Def}(f_1)$ nicht-entscheidbar und $\text{Bild}(f_1)$ entscheidbar.
2. $\text{Def}(f_2)$ nicht-entscheidbar und $\text{Bild}(f_2)$ nicht-entscheidbar.
3. $\text{Def}(f_3)$ entscheidbar und $\text{Bild}(f_3)$ nicht-entscheidbar.
4. $\text{Def}(f_4)$ entscheidbar und $\text{Bild}(f_4)$ entscheidbar.

Aufgabe 6
Seien $A_1, \dots A_n$ paarweise disjunkte, aufzählbare Teilmengen von $\{0,1\}^*$ und sei A die Vereinigung der Mengen $A_1, \dots, A_n$. Zeigen Sie: Falls A entscheidbar ist, dann sind auch alle Mengen A_i entscheidbar $(i = 1, \dots, n)$.

Aufgabe 7
Sei Σ ein Alphabet, so dass $H_1 \subseteq \Sigma^*$ und a, b, c weitere Zeichen (also $\Sigma \cap \{a, b, c\} = \emptyset$). Wir definieren:

$$\begin{aligned}
L_0 &:= \{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup H_1 \\
L_1 &:= \{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \Sigma^* \\
L_2 &:= \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\} \cdot L(c^*) \ \cup \ \Sigma^* \\
L_1 &:= L(a^* b^* c^*) \cup \Sigma^*
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset L_3$ und dass L_3 regulär, L_2 kontextfrei und nichtregulär, L_1 kontextsensitiv und nichtkontextfrei sowie L_0 aufzählbar und nichtkontextsensitiv ist.

Aufgabe 8
Zeigen Sie:

1. Zu jeder unendlichen aufzählbaren Sprache L gibt es unendlich viele verschieden Funktionen f, die L aufzählen.
2. Zu jeder semi-entscheidbaren Sprache L gibt es unendlich viele verschieden Turingmaschinen M, die L semi-entscheiden.
3. Zu jeder entscheidbaren Sprache L gibt es unendlich viele verschieden Turingmaschinen M, die L entscheiden.

Aufgabe 9
Zeigen Sie für folgende Sprachpaare (L_1, L_2), daß $L_1 \leq_m L_2$ und $L_2 \leq_m L_1$.

1. $L_1 := \{aa\}$ und $L_2 := \{b, a\}$,
2. $L_1 := \{aa\}$ und $L_2 := \{w \in \{c\}^* \mid |w| \text{ ist durch 4 teilbar}\}$,
3. $L_1 := \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \text{ ist gerade}\}$ und $L_2 := \{w \in \{c\}^* \mid |w| \text{ ist durch 4 teilbar}\}$,
4. $L_1 := \{w\overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}$ und $L_2 := \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Aufgabe 10
Sind folgende Funktionen $f : \{a,b\}^* \to \{a,b\}^*$ Reduktionen von L_1 auf L_2 ($L_1, L_2 \subseteq \{a,b\}^*$)?

1. $f(w) := a^{\#_a(w)}$, $L_1 := \{ab\}$ und $L_2 := \{b,a\}$.
2. $f(w) := ww$, $L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid 2 \text{ teilt } |w|)\}$ und $L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid 4 \text{ teilt } |w|\}$,
3. $f(w) := (bb)^{\#_a(w)}$, $L_1 := \{(aab)^n \in \{a,b\}^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid 4 \text{ teilt } \#_b(w)\}$,
4. $f(w) := w\overleftarrow{w}$, $L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ endet mit } aa\}$ und $L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid aaa \text{ Teilwort von } w\}$,
5. $f(w) := w\overleftarrow{w}$, $L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ endet mit } a\}$ und $L_2 := \{uaav \mid u,v \in \{a,b\}^* \wedge |u| = |v|\}$.

Aufgabe 11
Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche nicht-aufzählbare Menge und sei $f : \mathbb{N} \to A$ definiert durch:

$$f(i) := \begin{cases} \min(A) & \text{falls } i = 0, \\ \min(A \setminus \{f(l) \mid l = 0, \ldots, i-1\}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

1. f ist eine totale Bijektion $f : \mathbb{N} \to A$.
2. Die Funktion f ist keine Reduktion von $\mathbb{N}$ auf A.
3. Die Funktion $g : \{a\}^* \to \{a\}^*$ mit $g(a^n) := a^{f(n)}$ ist keine Reduktion von $\{a\}^*$ auf $\{a^i \mid i \in A\}$.

Aufgabe 12
Wir betrachten die Funktion f, welche das Programm u einer Turing-Maschine M_u in das Programm v einer Turing-Maschine M_v abbildet die sich wie folgt verhält:

- Bei Eingabe eines Wortes x löscht M_v zunächst seine Eingabe (d.h. M_v ersetzt x durch λ). Anschließend schreibt M_v das Paar (u,u) auf das Band und verhält sich anschließend wie die universelle Turing Maschine (d.h. M_v simuliert M_u auf Input u). Anschließend löscht M_v ihr Band und stoppt.

Zeigen Sie:

1. f ist berechenbar.
2. f ist jeweils eine Reduktionsfunktion von $H_1 = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u)\downarrow\}$ auf die folgenden Sprachen L_i ($i = 1,\ldots,4$)

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v\ (\lambda)\downarrow\} \\
L_2 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } L(M_v) \neq \emptyset\ \} \\
L_3 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ stoppt für unendlich viele Eingaben}\} \\
L_4 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } \exists x : M_v(x)\downarrow \lambda\} \\
L_5 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } \forall x : M_v(x)\downarrow \lambda\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 13
Sei

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{x \mid x \text{ ist Code einer TM und } \exists y : M_x(y)\downarrow 11\}, \text{ und} \\
L_2 &:= \{x \mid x \text{ ist Code einer TM und } \exists z : M_x(x)\downarrow z \ \wedge\ z \neq x\}.
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß L_1 und L_2 aufzählbar sind,
– indem Sie jeweils eine erkennende Turing-Maschine skizzieren, sowie
– indem Sie L_1 bzw. L_2 jeweils auf $H_1 = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u)\downarrow\}$ reduzieren.

Aufgabe 14
Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0,1\}^*$)

1. $(A \leq_m B \wedge B \in \text{REC}) \implies A \in \text{REC}$.
2. $(A \leq_m B \wedge A \notin \text{RE}) \implies B \notin \text{RE}$.
3. Ist A entscheidbar, $B \neq \emptyset$, $B \neq \{0,1\}^*$, dann ist $A \leq_m B$.
4. $[\, L \in \text{RE} \wedge L \notin \text{REC}\,] \Longrightarrow [L \not\leq_m \overline{L}$ und $\overline{L} \not\leq_m L]$.
5. $H_1 \leq_m \left(\{1\} \cdot H_1 \cup \{0\} \cdot \overline{H_1}\right)$, $\overline{H_1} \leq_m \left(\{1\} \cdot H_1 \cup \{0\} \cdot \overline{H_1}\right)$
6. Es gibt eine Sprache L, so daß weder die Sprache L noch ihr Komplement $\overline{L}$ aufzählbar sind.
7. Es gibt nicht-entscheidbare Sprachen A und B mit $A \leq_m B$ und $B \not\leq_m A$.

Aufgabe 15
Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0,1\}^*$, vollständig jeweils bezüglich $\leq_m$)

1. (A RE-vollständig und $A \leq_m B$ und $B \in$ RE) $\implies$ B RE-vollständig.
2. H und H_1 sind RE-vollständig.
3. Es gibt RE-vollständige Sprachen in $\{0\}^*$.
4. Keine entscheidbare Sprache ist RE-vollständig.
5. Jede nicht-triviale entscheidbare Sprache ist REC-vollständig..

Aufgabe 16
Wir betrachten die Funktion f, welche das Programm u einer Turing-Maschine M_u in das Programm v einer Turing-Maschine M_v mit Eingabealphabet Σ abbildet die sich wie folgt verhält:
Bei Eingabe eines Wortes $x \in \Sigma^*$ simuliert M_v zunächst M_u auf Input u für höchstns $|x|$ Schritte. Wird innerhalb diese $|x|$ Schritte die Simulation beendet (also stoppt M_u auf Input u in weniger als $|x|$ Schritten), startet M_v eine Endlosschleife (der Input x wird verworfen); wird die Simulation hingegen nicht beendet (M_u führt auf Input u mehr als $|x|$ Schritte aus, so löscht M_v ihr Band und stoppt. M_v akzeptierend (der Input x wird akzeptiert, λ wird ausgegeben).

1. Zeigen Sie, dass f berechenbar ist.
2. Zeigen Sie, dass f eine Reduktionsfunktion von $H_1 = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u)\downarrow\}$ auf die folgenden Sprachen L_i ist ($i = 1, 2, 3$)
$$\begin{aligned} L_1 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } L(M_v) \neq \Sigma^*\} \\ L_2 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } \exists x : M_v(x)\uparrow\} \\ L_3 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ stoppt nur für unendlich viele Eingaben}\} \end{aligned}$$
3. Zeigen Sie, dass f eine Reduktionsfunktion von $\overline{H_1} = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u)\uparrow\}$ auf die folgenden Sprachen L_i ist ($i = 4, 5$)
$$\begin{aligned} L_4 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } L(M_v) = \Sigma^*\} \\ L_5 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } \forall x : M_v(x)\downarrow\lambda\} \end{aligned}$$

Aufgabe 17
Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar? Bei welchen Sprachen kann der Satz von Rice angewendet werden? Begründen Sie ihre Angaben.
$$\begin{aligned} L_1 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ hat eine ungerade Anzahl von Zuständen}\} \\ L_2 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und bei Eingabe von 010 wird im Laufe der Berechnung ein } a \text{ gedruckt}\} \\ L_3 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ stoppt für unendlich viele Eingaben.}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 18
Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen L_1und L_2 nicht aufzählbar sind.
$$\begin{aligned} L_1 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } L(M_v) = \Sigma^*\} \\ L_2 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } \forall x : M_v(x)\downarrow\lambda\} \end{aligned}$$

Hinweis: Reduzieren sie $\overline{H_1} = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u)\uparrow\}$ auf die Sprachen.

Aufgabe 19
Seien $L, L' \subseteq \{a,b\}^*$. Zeigen Sie:

1. Sind L und L' entscheidbar, so sind auch $L \cap L'$ und $L \cup L'$ entscheidbar.
2. Ist L entscheidbar, so ist auch $\overline{L} = \{a,b\}^* \setminus L$ entscheidbar.
3. Sind L und L' entscheidbar, so ist auch $L \cdot L'$ entscheidbar.
4. Sind L aufzählbar, so ist auch L^* aufzählbar.
5. Ist L entscheidbar, so ist $\overline{L}$ semi-entscheidbar.

Aufgabe 20
Zeigen Sie, dass es Sprachen L_0, L_1, L_2, L_3 sowie L_0', L_1', L_2', L_3' gibt mit

1. $L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset L_3$, und
2. $L_0' \supset L_1' \supset L_2' \supset L_3'$, und
3. L_3, L_3' regulär, L_2, L_2' kontextfrei und nichtregulär, L_1, L_1' entscheidbar und nichtkontextfrei und L_0, L_0' aufzählbar und nichtentscheidbar.

Aufgabe 21
Welche der Eigenschaften "reflexiv", "symmetrisch", "antisymmetrisch", "transitiv" haben die Relationen "$\leq_m$" bzw. "$\equiv_m$" auf der Menge aller Sprachen über dem Alphabet $\{0,1\}^*$? Beweisen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 22
Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm mit den Sprachklassen, die durch die Chomsky-Typ-i-Grammatiken festgelegt werden ($i = 0,1,2,3$), den endlichen Sprachen, den entscheidbaren Sprachen sowie der Klasse aller Sprachen. Tragen Sie für $j = 1,\ldots,6$ die folgenden Sprachen $L_j := \{a^n b^{f(n)} \mid n \in \mathrm{def}(f_j)\}$ ein, wobei die Funktionen $f_j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert sind durch:

$$
\begin{aligned}
f_1(n) &= 2 \cdot n \\
f_2(n) &= n^2 \\
f_3(n) &= 2^n \\
f_4(n) &= \chi_{\mathrm{UN}(H_1)}(n) \quad \text{(charakteristische Funktion von } \mathrm{UN}(H_1)\text{)} \\
f_5(n) &= \chi'_{\mathrm{UN}(H_1)}(n) \quad \text{(semi-charakteristische Funktion von } \mathrm{UN}(H_1)\text{)} \\
f_6(n) &= \chi'_{\overline{\mathrm{UN}(H_1)}}(n) \quad \text{(semi-charakteristische Funktion von } \overline{\mathrm{UN}(H_1)}\text{)}
\end{aligned}
$$

Begründen Sie Ihre Eintragungen!

$\mathrm{UN}(H_1)$ ist die unäre Version des Selbstanwenderproblems.

Aufgabe 23
Sind folgende Funktionen $f : \{a,b\}^* \to \{a,b\}^*$ Reduktionen von L_1 auf L_2 ($L_1, L_2 \subseteq \{a,b\}^*$)?

1. $f(w) := (w\overleftarrow{w})^2$,
   $L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist Quadratzahl}\}$ und $L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist Quadratzahl}\}$,
2. $f(w) := (bb)^{\#_a(w)}$,
   $L_1 := \{(aba)^{3n} \in \{a,b\}^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid 6 \text{ teilt } \#_b(w)\}$

Aufgabe 24
Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0,1\}^*$)

1. $(A \leq_m B \wedge B \in \mathrm{RE}) \implies A \in \mathrm{RE}$.
2. $(A \leq_m B \wedge A \notin \mathrm{REC}) \implies B \notin \mathrm{REC}$.
3. $A \leq_m B \iff \overline{A} \leq_m \overline{B}$
4. $\neg(\overline{H_1} \leq_m H_1)$
5. $\left(\{1\} \cdot H_1 \cup \{0\} \cdot \overline{H_1}\right) \not\leq_m H_1$
6. Es gibt eine Sprache L, so daß weder die Sprache L noch ihr Komplement $\overline{L}$ aufzählbar sind.
7. Sind A und B RE-vollständig, so gilt $A \equiv_m B$.

Aufgabe 25
Zeigen sie, dass die folgenden Sprachen nicht entscheidbar sind, indem Sie $H_1 = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u)\downarrow\}$ auf diese Sprachen reduzieren:

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v\ (010)\downarrow\}\\
L_2 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } |L(M_v)| = \infty\ \}\\
L_3 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ stoppt immer}\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 26
Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar? Bei welchen Sprachen kann der Satz von Rice angewendet werden? Begründen Sie ihre Angaben.

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ hat eine gerade Anzahl von Zuständen}\}\\
L_2 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und bei Eingabe von } \lambda \text{ wird im Laufe der Berechnung ein } a \text{ gedruckt}\}
\end{aligned}$$