Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 11

Abgabetermin: 12.01.2015

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1 und 2,
- Aufgabe 3, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 6, 7 und 8

Fragen zu den Aufgaben können auf `http://www.BTU-Forum.DE` in Unterforum "Theoretische Informatik, ..." gestellt werden.

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Die Aufgaben auf diesem Blatt behandeln Stoff, der bekannt sein sollte. Dieser Stoff wird am Ende der Vorlesung benötigt. Wer hierbei noch Defizite hat, möge entsprechend nacharbeiten.

Definition: Sei $\mathcal{F}$ die Menge der totalen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.

- $\mathcal{O}(f) := \{g \in \mathcal{F} \mid \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\exists c \in \mathbb{N}\; \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)\}$
- $o(f) := \{g \in \mathcal{F} \mid \forall c \in \mathbb{N} \;\exists n_c \in \mathbb{N} \;\forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > n_c : g(n) \leq \frac{1}{c} \cdot f(n)\}$

Aufgabe 2
Schlagen Sie die Regel von (de) L'Hôpital nach.

Aufgabe 3
Ordnen Sie folgende Funktionen nach ihren Wachstumseigenschaften:

$\log n$, $\sqrt{\log n}$, $\sqrt{n}$, $(\log \sqrt{n})^2$, $\frac{n}{\log n}$, n^2, n^k (für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$), $n^{\log n}$, $n^{\log\log n}$, $\log(n^2)$, $(\log n)^2$, n^n, $\log\log\log n$, $\sum_{i=0}^{n} i$, $\sum_{i=0}^{n} i^2$, $2^{n \log n}$, $(\sqrt{\log n})^{\log\log n}$.

Beweisen Sie jeweils die entsprechenden $\mathcal{O}$– bzw. o–Beziehungen.

Aufgabe 4
Geben Sie Funktionen f und g (von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$) an, so dass weder $f \in \mathcal{O}(g)$ noch $g \in \mathcal{O}(f)$. Beweisen Sie diese Eigenschaften.

Aufgabe 5
Welche $\mathcal{O}$– bzw. o–Beziehungen gibt es zwischen den folgenden Funktionen?

$f_1(n) := n^3$

$$f_2(n) := \begin{cases} n^2 & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ n^4 & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$f_3(n) := \begin{cases} n^5 & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ n^2 \cdot \log(n) & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$f_4(n) := \begin{cases} n^n & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ 2^{n \cdot \log(n)} \cdot \log(n) & \text{, sonst} \end{cases}$$

$f_5(n) := n!$

Beweisen Sie die Eigenschaften

Aufgabe 6
Zeigen Sie:

$$\mathcal{O}(\log) = \mathcal{O}(\log_{10}) = \mathcal{O}(\ln) = \mathcal{O}(\log(2n)) = \mathcal{O}(\log(n + \log(n)) = \mathcal{O}(\log(n^2))$$

Aufgabe 7
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(h) \implies f \in \mathcal{O}(h)$
2. $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in o(h) \implies f \in o(h)$
3. $f \in o(g)$ und $g \in \mathcal{O}(h) \implies f \in o(h)$
4. Die Relation $R_{\mathcal{O}}$ definiert vermöge $(f, g) \in R_{\mathcal{O}} :\Leftrightarrow f \in \mathcal{O}(g)$ ist auf der Menge $\mathcal{F}$ der totalen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ eine Äquivalenzrelation.
5. Die Relation R_{o} definiert durch $(f, g) \in R_{o} :\Leftrightarrow f \in o(g)$ ist ist auf der Menge $\mathcal{F}$ der totalen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ eine Ordnungsrelation.

Aufgabe 8
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. $f \in \mathcal{O}(g) \setminus o(g) \implies g \in \mathcal{O}(f)$
2. Es gibt Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit: $f \notin \mathcal{O}(g)$ und $g \notin \mathcal{O}(f)$