

# Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

## Aufgabenblatt 10

Abgabetermin: 09.01.2015

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

### Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

- Bearbeitung von:
- Aufgabe 1 und 2,
  - Aufgabe 3, wird aber nicht korrigiert,
  - Aufgaben 15, 16, 17, 18 und 19

Fragen zu den Aufgaben können auf <http://www.BTU-Forum.DE> in Unterforum “Theoretische Informatik, ...” gestellt werden.

### Aufgabe 1

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

### Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

### Aufgabe 3

Konstruieren Sie Turing-Maschinen, die die folgenden Bandinhalte in der angegebenen Weise verändern. Die Turing-Maschinen starten auf dem ersten Non-Blank-Zeichen, und sollen beim Stoppen wiederum auf diesem Feld stehen (Eingabealphabet ist  $\{0, 1, a\}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ ).

1.  $a^n 1 a^m$  nach  $a^{n-m}$ , wobei  $n-m := \begin{cases} n-m & \text{falls } n \geq m, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
2.  $a^n 1 a^m$  nach  $a^{n-m}$ .
3.  $a^n 1 a^m$  nach  $a^{n//m}$ , wobei  $n//m$  die ganzzahlige Division von  $n$  durch  $m$  bezeichnet.
4.  $a^n 1 a^m$  nach  $a^{n \bmod m}$ .
5.  $a^n$  nach  $\text{bin}(n)$ , wobei  $\text{bin}(n)$  die Binärdarstellung von  $n$  ist (niederwertige Bits hinten).
6.  $\text{bin}(n)$  nach  $a^n$ .
7.  $\text{bin}(n) \square \text{bin}(m)$  nach  $\text{bin}(n+m)$ .
8.  $\text{bin}(n) \square \text{bin}(m)$  nach  $\text{bin}(n \cdot m)$ .
9.  $\text{bin}(n)$  nach  $\text{bin}(n^2)$  überführt.

Kommentieren Sie Ihre Programme!

### Aufgabe 4

Geben Sie für folgende Sprachen jeweils entscheidende Turing-Maschinen an:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\} \\
 L_2 &= \{w \in \{a, b\}^* \mid abbb \text{ ist nicht Teilwort von } w\} \\
 L_3 &= \{w c w \mid w \in \{a, b\}^*\} \\
 L_4 &= \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}
 \end{aligned}$$

Kommentieren Sie Ihre Programme!

**Aufgabe 5**

Geben Sie eine entscheidende Turing-Maschine für  $L(\alpha)$  an, wobei  $\alpha$  der folgende reguläre Ausdruck ist.

$$\alpha = ((aba \cup bbb)^* \cdot (aaa \cup bbb)^* \cdot (ccc)^*)$$

Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise und Ihr Programm!

**Aufgabe 6**

Geben Sie eine Turing-Maschine  $M$  an, die  $\text{bin}(n)$  nach  $\text{hex}(n)$  überführt, wobei  $\text{hex}(n)$  die Hexadezimaldarstellung von  $n$  ist (niederwertige Stellen hinten). Geben Sie einen Lauf von  $M$  auf dem Wort 11110100101 an. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise und Ihr Programm!

**Aufgabe 7**

Geben Sie Turing-Maschinen an, die aus einem Bandinhalt der Form  $w_1 \square w_2 \square \dots \square w_k$  (beliebige Anzahl nichtleerer Worte, jeweils durch ein Blank ( $\square$ ) getrennt) die folgenden Bandinhalte erzeugen ( $w_1, w_2, \dots, w_k \in \{0, 1\}^+$ ):

1.  $w_1 \square w_2 \square \dots \square w_k \square w_1$ .
2.  $w_1 \square w_2 \square \dots \square w_{k-1} \square w_k \square w_1 \square w_2 \square \dots \square w_{k-1} \square w_k$ .
3.  $w_1 \square w_3 \square w_5 \square \dots \square w_n$  mit  $n = \begin{cases} k-1 & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ k & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$
4.  $w_1 \square w_2 \square w_1 \square w_3 \square w_1 \square w_4 \square \dots \square w_{k-1} \square w_1 \square w_k$ .

Kommentieren Sie Ihre Programme!

**Aufgabe 8**

Geben Sie Turing-Maschinen an, die folgende Funktionen berechnen:

1.  $f_1 : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$  mit  $f_1(w) = a^{2 \cdot \#_b(w)}$ .
2.  $f_2 : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$  mit  $f_2(w) = \begin{cases} a^{2 \cdot \#_b(w)} & , \text{ falls } \#_a(w) \text{ gerade,} \\ \text{undefiniert} & , \text{ sonst.} \end{cases}$
3.  $f_3 : \{a, b\}^* \times \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$  mit  $f_3(w, v) = \begin{cases} wv & , \text{ falls } |w| \text{ gerade,} \\ w \overleftarrow{v} & , \text{ sonst.} \end{cases}$

Kommentieren Sie Ihre Programme!

**Aufgabe 9**

Sei  $\Sigma$  ein Alphabet und  $L \subseteq \Sigma^*$ . Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

1.  $L$  ist entscheidbar.
2.  $L$  und  $\bar{L}$  sind semi-entscheidbar.
3. Es gibt eine Turingmaschine, die akzeptierend stoppt falls  $x \in L$ , und verwerfend stoppt, falls  $x \notin L$ .
4.  $L = \text{Bild}(f)$  für eine totale berechenbare streng-monoton steigende Funktion  $f : \{1\}^* \rightarrow \Sigma^*$  oder  $L$  ist endlich.
5. Die charakteristische  $\chi_L$  Funktion von  $L$  ist berechenbar.

**Aufgabe 10**

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Die Menge der abzählbaren Sprachen über  $\Sigma$  ist überabzählbar.
2. Die Menge der aufzählbaren Sprachen über  $\Sigma$  ist abzählbar.
3. Es gibt nicht-aufzählbare Sprachen über  $\Sigma$ .

**Aufgabe 11**

Seien  $L, L' \subseteq \{a, b\}^*$ . Zeigen Sie:

1. Sind  $L$  und  $L'$  aufzählbar, so ist auch  $L \cup L'$  aufzählbar.
2. Sind  $L$  und  $L'$  semi-entscheidbar, so ist auch  $L \cap L'$  aufzählbar.
3. Sind  $L$  und  $L'$  aufzählbar, so ist auch  $L \cdot L'$  aufzählbar.
4. Ist  $L$  aufzählbar, so ist auch  $L^*$  aufzählbar.
5. Ist  $L$  entscheidbar, so ist  $L$  aufzählbar.

**Aufgabe 12**

Geben Sie eine Turing-Maschine an, die aus einem Bandinhalt der Form  $w_1 \square w_2 \square \dots \square w_k$  (beliebige Anzahl nichtleerer Worte, jeweils durch ein Blank ( $\square$ ) getrennt.  $w_1, w_2, \dots, w_k \in \{0, 1\}^+$ ) den Bandinhalt  $w_1 \square w_2 \square \dots \square w_{k-1} \square w_k \square w_k \square w_{k-1} \square \dots \square w_2 \square w_1$  erzeugt.

**Aufgabe 13**

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

1. Jede Teilmenge einer aufzählbaren Sprache ist abzählbar.
2. Jede Teilmenge einer abzählbaren Sprache ist aufzählbar.
3. Jede Teilmenge einer abzählbaren Sprache ist abzählbar.
4. Jede Teilmenge einer entscheidbaren Sprache ist abzählbar.
5. Jede Obermenge einer nichtaufzählbaren Sprache ist nichtaufzählbar.
6. Jede Obermenge einer nichtentscheidbaren Sprache ist nichtentscheidbar.
7. Jede Teilmenge einer nichtentscheidbaren Sprache ist nichtentscheidbar.

**Aufgabe 14**

Konstruieren Sie Turing-Maschinen, die die folgenden Bandinhalte in der angegebenen Weise verändern. Die Turing-Maschinen starten auf dem ersten Non-Blank-Zeichen, und sollen beim Stoppen wiederum auf diesem Feld stehen (Eingabealphabet ist  $\{0, 1, a\}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ ). Kommentieren Sie Ihre Programme!

1.  $a^n 1 a^m$  nach  $a^{n \cdot m}$ .
2.  $\text{bin}(n) \square \text{bin}(m)$  nach  $\text{bin}(n + m)$ .

**Aufgabe 15**

Geben Sie eine entscheidende Turing-Maschine (mit Kommentierung) für die folgende Sprache an:

$$L := \{w c w c a^n \mid w \in \{a, b\}^* \wedge n \in \mathbb{N} \wedge 3 \cdot |w| = n\}$$

**Aufgabe 16**

Geben Sie eine Turing-Maschinen (mit Kommentierung) an, die folgende Funktion  $f$  berechnet:

$$f : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^* \text{ mit } f_2(w) = \begin{cases} (bba)^{3 \cdot \#_b(w)} & , \text{ falls } \#_a(w) \text{ nicht durch 4 teilbar,} \\ \text{undefiniert} & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

**Aufgabe 17**

Sei  $f$  eine Funktion aus  $\Sigma^*$  nach  $\Sigma^*$ . Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1.  $f$  berechenbar  $\implies \text{Bild}(f)$  aufzählbar.
2.  $f$  berechenbar  $\implies \text{Def}(f)$  aufzählbar.
3.  $f$  berechenbar und total  $\implies \text{Bild}(f)$  entscheidbar.
4.  $f$  berechenbar und total  $\implies \text{Def}(f)$  entscheidbar.

**Aufgabe 18**

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

1. Jede Teilmenge einer aufzählbaren Sprache ist aufzählbar.
  2. Jede Teilmenge einer entscheidbaren Sprache ist aufzählbar.
  3. Jede aufzählbare Sprache hat eine entscheidbare Teilmenge.
  4. Jede Teilmenge einer nichtaufzählbaren Sprache ist nichtaufzählbar.
- 

**Def.: [(semi-)charakteristische Funktion]:**

Für eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  sind die *semi-charakteristische Funktion*  $\varphi_L$  und die *charakteristische Funktion*  $\chi_L$  definiert durch:

- $\varphi_L : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  mit  $\varphi_L(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in L, \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst.} \end{cases}$
  - $\chi_L : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  mit  $\chi_L(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in L, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$
- 

E schéine Kréschtdag an e glécklecht neit Joer!  
Vrolijk Kerstmis en een een Gelukkig Nieuwjaar!

God Jul och Gott Nytt År!

Joyeux Noël et une Bonne Nouvelle Année!

Frohe Weihnachten und einen Guten Rutsch ins Neue Jahr!

---