Strukturelle Komplexitätstheorie

Dr. Gengler

Aufgabenblatt 9

Bearbeitung bis zum 16.06.2014

Aufgabe 1
Für $i \in \mathbb{N}$ sei $\text{bin}(i)$ die Binärdarstellung von i (ohne führende Nullen und mit niederwertigstem Bit hinten) sowie $\text{BIN}(i) := \text{bin}(1)\#\,\text{bin}(2)\# \cdots \#\,\text{bin}(i)$. Wir definieren:

$$L_a := \{\text{BIN}(n)\#w_0\# \cdots \#w_k \mid k \in \mathbb{N} \wedge w_0, \ldots, w_k \in \{a,b\}^* \wedge |w| = \log(n) \wedge \exists i \in \{1, \ldots, k\} : w_0 = w_i\}$$
$$L_e := \{\text{BIN}(n)\#w_0\# \cdots \#w_k \mid k \in \mathbb{N} \wedge w_0, \ldots, w_k \in \{a,b\}^* \wedge |w| = \log(n) \wedge \exists i \in \{0, \ldots, k-1\} : w_k = w_i\}$$

Zeigen Sie:

1. $L_a :\in 2\text{AT}[\log \circ \log]_{\text{strong}}$
2. $L_e :\in 1\text{AT}[\log \circ \log]_{\text{weak}}$

Aufgabe 2
Wir definieren:

$$\text{kN}(n) := \min\{t \in N \mid t > 1\ ,\ t \text{ teilt } n \text{ nicht}\}$$
$$\text{gkN}(n) := \max\{\text{kN}(\nu) \mid \nu \in \{1, \ldots n\}\ \}$$

Zeigen Sie:

1. $L_{\text{kN}} := \{a^n b^m \mid n, m \in N \wedge n = \text{kN}(m)\} \ \in\ 1\Pi_1\text{T}[\log \circ \log]_{\text{weak}}$
2. $L_{\text{gkN}} := \{a^n b^m \mid n, m \in N \wedge n = \text{gkN}(m)\} \ \in\ 1\Pi_3\text{T}[\log \circ \log]_{\text{weak}}$
3. $L_{\text{Spr}} = \{a^n \mid n \in N \wedge \text{kN}(n) = \text{gkN}(n) \wedge \forall l < m : \text{gkN}(l) < m\} \ \in\ 1\Sigma_2\text{T}[\log \circ \log]_{\text{weak}}$

Aufgabe 3
Zeigen Sie:

$$2\text{AT}[\mathcal{O}(1)] = \text{REG}$$

Hinweis:
Sei M eine two-way alternierende Turing-Maschine. OBdA drucke M nie Blank und stoppe M nur auf dem ersten Inputfeld. Wir verallgemeinern den Begriff Crossing Sequence: statt aus einzelnen Zuständen wie im sequentiellen Fall besteht die Crossing Sequence jetzt aus einer Folge von Zustandsmengen, nämlich dem "Schnitten" durch einen akzeptierenden Erfolgsbaum, die durch die Überquerungen der jeweiligen Feldgrenze induziert werden. Ein 1NFA kann nach und nach aneinander passende Crossing Sequences raten.

Aufgabe 4
Zeigen Sie:

$$2\text{AT}[o(\log \circ \log \circ \log)]_{\text{weak}} = 2\text{AT}[\mathcal{O}(1)] = \text{REG}$$

Hinweis:
Sei M eine two-way alternierende Turing-Maschine. OBdA drucke M nie Blank und stoppe M nur auf dem ersten Inputfeld. Für $p \in N$ bezeichne K_p die Menge aller Arbeitskonfigurationen mit höchstens p Platz.
Zu einem Inputwort u und einer Platzschranke p definieren wir die Tabelle T_u^p wie folgt: Für $s \in K_p$ und $\{s_1 \ldots, s_k\} \in \mathcal{P}(K_p)$ ist $T_w^p[s; \{s_1 \ldots, s_k\}] = 1$, falls es einen (alternierenden) Teilbaum mit Platzvverbrauch höchstens p gibt, der nur rechts vom ersten Zeichen von u arbeitet, auf Feld 1 von u mit der Arbeitskonfiguration s seine Wurzel hat, als Blätter nur akzeptierende Stopkonfigurationen und die Konfigurationen aus $\{s_1 \ldots, s_k\}$ unmittelbar nach Verlassen nach links des Feldes 1 von w hat, und mit der Eigenschaft: "Sind alle Blätter erfolgreich, so ist auch die Wurzel erfolgreich". Andernfalls ist $T_w^p[s; \{s_1 \ldots, s_k\}] = 0$.

1. Bestimmen Sie Größe und Anzahl der Tabellen T_w^p.
2. Zeigen Sie: Gilt für ein von M akzeptiertes Wort $w = xyz$ (mit $y \neq \lambda$), dass $T_{yz}^p = T_z^p$, so wird auch yz akzeptiert, bei gleichem Platzaufwand.
3. Zeigen Sie: Bei einem kürzesten Wort w, bei dem M den Platz i verbraucht, muss $T_{yz}^p \neq T_z^p$ oder $T_{yz}^{p-1} \neq T_{pz}^{p-1}$gelten, falls $w = xyz$ (wo $y \neq \lambda$).

Aufgabe 5
Zeigen Sie:

$$2\mathrm{AT}[\mathcal{O}(\log \circ \log)]_{\mathrm{weak}} = 2\mathrm{AT}[\mathcal{O}(1)] = \mathrm{REG}$$

Hinweis:
Sei M eine two-way alternierende Turing-Maschine. OBdA drucke M nie Blank und stoppe M nur auf dem ersten Inputfeld. Für $p \in N$ bezeichne K_p die Menge aller Arbeitskonfigurationen mit höchstens p Platz.
Zu einem markierten Inputwort $u \uparrow v$, einer Platzschranke p und einer natürlichen Zahl i definieren wir rekursiv die Tabelle $T_{u\Uparrow v}^s(i)$ wie folgt:
$T_{u\uparrow v}^p(i)$ enthält $(s, m) \in K_p \times \mathbb{N}$ falls es einen optimalen Erfolgsbaum für s unmittelbar nach dem Überschreiten der markierten Grenze zwischen u und v gibt, der genau den Platzverbrauch m hat und der die Grenze höchstens $(i-1)$-mal überschreitet. Optimal bedeutet hierbei, dass es zu s keinem Erfolgsbaum mit echt kleineren Aufwand m' bei höchstens $(i-1)$ Grenzüberschreitungen gibt sowie dass für kein $m' \leq m$ $(s, m\prime)$ schon in einem $T_{u\uparrow v}^p(j)$ mit $j < i$ enthalten ist.
Weiterhin sei $T_{u\uparrow v}^p$ die Folge $(T_{u\uparrow v}^p)_{i\in\mathbb{N}}$.

1. Zeigen Sie: Ist $T_{u\uparrow v}^p(i)$ leer, so auch $T_{u\uparrow v}^p(j)$ für $j > i$.
2. Bestimmen Sie Größe und Anzahl der Tabellen $T_{u\uparrow v}^p$.
3. Zeigen Sie: Gilt für ein von M akzeptiertes Wort $w = xyz$ (mit $y \neq \lambda$), dass $T_{x\uparrow vz}^p = T_{xy\uparrow z}^p$, so wird auch yz akzeptiert.
4. Zeigen Sie, dass dann auch der bei xyz und xz benötigte Platzaufwand zum Akzeptieren gleich ist.
5. Zeigen Sie: Bei einem kürzesten Wort w, bei dem M den Platz i verbraucht, muss $T_{x\uparrow vz}^p = T_{xy\uparrow z}^p$ gelten, falls $w = xyz$ (wo $y \neq \lambda$).