Strukturelle Komplexitätstheorie

Dr. Gengler

Aufgabenblatt 8

Bearbeitung bis zum 16.06.2014

Aufgabe 1
Zeigen Sie:

$$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME} \subseteq \mathrm{NEXPTIME}$$

Aufgabe 2
Zeigen Sie: Gibt es eine kontextfreie NP-vollständige Sprache, so ist NP = P.

Aufgabe 3
Zu einer Sprachklasse $\mathcal{L}$ definieren wir co-$\mathcal{L}$ vermöge co-$\mathcal{L} := \{L \mid \overline{L} \in \mathcal{L}\}$. Zeigen Sie:

1. co-P = P
2. co-REC = REC
3. RE ∩ co-RE = REC
4. Ist L NP-vollständig, so ist $\overline{L}$ co-P-vollständig

Aufgabe 4
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen (Σ ist endliches Alphabet):

1. $\forall L \in \mathcal{P}(\Sigma^*) : L \leq_{\mathrm{p}} \overline{L}$
2. $\mathrm{NP} = \mathrm{P} \implies \mathrm{NPC} = \mathrm{P}$
3. $(L \in \mathrm{P} \wedge L' \in \mathrm{P}) \implies L \equiv_{\mathrm{p}} L'$
4. Es gibt Sprachen in NP, die nicht NP-vollständig (bzgl. $\leq_{\mathrm{p}}$) sind.
5. Gilt NP = P , so sind alle Sprachen in NP bzgl. $\leq_{\mathrm{T}}^{\mathrm{p}}$ NP-vollständig.

Aufgabe 5
Bestimmen Sie die Menge der (bzgl. $\leq_{\mathrm{p}}$) P-vollständigen Sprachen.

Aufgabe 6
Gilt NP ≠ co-NP, so liegt die Sprache $\{1\}\cdot\mathrm{SAT} \cup \{2\}\cdot\overline{\mathrm{SAT}}$ (markierte Vereinigung) weder in NP noch in co-NP.

Aufgabe 7
Wir betrachten die folgenden Sprachen L_1 und L_2 (bin(n) bezeichnet die Binärdarstellung von n, niederwertigste Bits hinten, ohne führende Nullen)::

$$\begin{aligned}
L_1 := \{\mathrm{bin}(n_0)c \ldots c\,\mathrm{bin}(n_k) \mid\ & k \in \mathbb{N} \text{ und} \\
& \forall i \in \{0,\ldots,k\} : n_i \in \mathbb{N} \text{ und} \\
& \exists J \subseteq \{1,\ldots,k\} : \sum_{i \in J} n_l = n_0 \ \} \\
L_2 := \{\mathrm{bin}(n_0)c \ldots c\,\mathrm{bin}(n_k) \mid\ & k \in \mathbb{N} \text{ und} \\
& \forall i \in \{0,\ldots,k\} : n_i \in \mathbb{N} \text{ und} \\
& \exists J \subseteq \{0,\ldots,k\} : \sum_{i \in J} n_i = \sum_{i \in \{0,\ldots,k\} \setminus J} n_i \ \}
\end{aligned}$$

1. Zeigen Sie: $L_1 \in \mathrm{NP}$ und $L_2 \in \mathrm{NP}$.
2. Zeigen Sie: $L_1 \equiv_m^{\mathrm{poly}} L_2$.
3. Zeigen Sie: L_1 und L_2 sind NP-vollständig (vgl. in der Literatur: Knappsack, Partition).

Aufgabe 8 (Euler Kreis)
Wir betrachten das Euler-Kreis-Problem:

> Instanz: Graph $G = (V, E)$.
> Frage: Hat G einen Euler-Kreis (einen Kreis, in dem alle Kanten aus E genau einmal vorkommen)?

Wie kann dieses Entscheidungsproblem codiert werden? Was wäre die Eingabegröße? Zeigen Sie, dass das Problem in P liegt.

Das Aufgabenblatt wird noch ergänzt.