Strukturelle Komplexitätstheorie

Dr. Gengler

Aufgabenblatt 7

Bearbeitung bis zum 02.06.2014

Aufgabe 1

Sei Σ ein endlichches Alphabet. Zeigen Sie, dass $\leq_{\text{mo}}^{\text{log}}$auf $\mathcal{P}(\Sigma)$ reflexif und transitiv ist, aber weder symetrisch noch antisymetris ist.

Aufgabe 2

Sei Σ ein endlichches Alphabet. Zeigen Sie, dass $\leq_{\text{T}}^{\text{log}}$auf $\mathcal{P}(\Sigma)$ reflexif und transitiv ist, aber weder symetrisch noch antisymetris ist.

Aufgabe 3

Sei Σ ein endlichches Alphabet. und $a, B \subseteq \Sigma^*$.Zeigen Sie:

$$A \leq_{\text{mo}}^{\text{log}} B \implies A \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} B \implies A \leq_{\text{T}}^{\text{poly}} B$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie:

$$\text{SAT} \leq_{\text{p}} \text{3SAT}$$

Aufgabe 5

Durch Anwendung der Regeln von de Morgan sowie den Distributivitätsgesetzen kann man eine beliebige aussagenlogische Formel in eine äquivalente aussagenlogische Formel in konjunktivere Normalform umwandeln. Skizieren Sie ein deterministisches Programm für diese Umwandlung. Ist diese Umwandlung eine polynomiale Reduktion von SAT auf SAT_{KNF}? (SAT_{KNF} ist die Menge der erfüllbaren aussagenlogischen Formeln in konjunktiver Normalform.)

Aufgabe 6

Zeigen Sie:

$$\text{SAT}_{\text{DNF}} \in \text{P}$$

(SAT_{DNF} ist die Menge der erfüllbaren aussagenlogischen Formeln in disjunktiver Normalform.)

Aufgabe 7

Sei $L := \{u\$v\$^t \mid u \in \{0,1\}^*$ ist Code einer Turingmaschine, $v \in \{0,1\}^*$ ein Input für T_u, $t \in \mathbb{N}$ und T_u angesetzt auf Input v stoppt akzeptierend in weniger als t Schritten$\}$.

Zeigen Sie, dass L NP-vollständig ist.

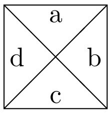
Beachten Sie, dass nicht alle Turing-Maschinen das Eingabe-Alphabet $\{0, 1\}$ haben.

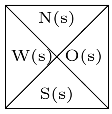
Aufgabe 8

Zeigen Sie, dass 2SAT in P liegt. (Recherchieren sie hierzu unter "Resolutionsverfahren") Wieso zeigt dieses Verfahren nicht auch, dass 3SAT in P liegt?

Aufgabe 9 (Dominospiel)

Wir betrachten eine endliche Menge D von quadratischen Dominosteinen (mit Einheitsgröße), die an ihren Seiten mit Farben aus einer einer endlichen Farbenmenge F markiert sind (oBdA 'weiß' $\in F$). Die Steine dürfen nicht gedreht werden. Sie dürfen allerdings mehrfach gelegt werden (also Herstellen einer Kopie des Steins und Legen dieser Kopie). Zu einem Stein $s = (a, b, c, d) \in F^4$ bezeichnen $N(s)$, $O(s)$, $S(s)$, $W(s)$ jeweis die Farben an den vier Seiten.

Stein $s = (a, b, c, d)$: 

Stein $s = (N(s), O(s), S(s), W(s))$: 

Wir können uns jetzt fragen, ob bei einem gegebenen Satz von Steinen eine bestimmte Fläche (Quadrat, Rechteck, Ebene, Halbebene,. . .) so parkettierbar ist, dass die Farben aneinandergrenzender Dominosteine jeweils übereinstimmen, gegebenfalls unter Beachtung zusätzlicher Randbedigungen.

Für ein $(n \times n)$-Quadrat ($n \in \mathbb{N}$) und eine Steinmenge $D = \{s_1, \ldots, s_k\}$ könnte man die Frage, "Gibt es eine Parkettierung mit weißem Rand?" wie folgt formalisieren:

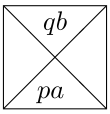
Gibt es eine totale Funktion $f : \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \to S$ mit:
- $N(f(i, j)) = S(f(i, j + 1))$ für $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, n - 1$
- $O(f(i, j)) = W(f(i + 1, j))$ für $i = 1, \ldots, n - 1$ und $j = 1, \ldots, n$
- $N(f(i, n))$ = 'weiß' für $i = 1, \ldots, n$
- $O(f(n, j))$ = 'weiß' für $j = 1, \ldots, n$
- $S(f(i, 1))$ = 'weiß' für $i = 1, \ldots, n$
- $W(f(1, j))$ = 'weiß' für $j = 1, \ldots, n$

Zeigen Sie:

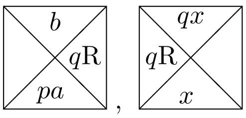
1. SQUARE-TILING := $\{x\$^n \mid$ x ist Code eines Dominosatzes D mit dem das $(n \times n)$-Quadrat mit weißem Rand parkettierbar ist$\}$ ist NP-vollständig.
2. Bin-SQUARE-TILING := $\{x\,\mathrm{bin}(n) \mid$ x ist Code eines Dominosatzes D mit dem das $(n\times n)$-Quadrat mit weißem Rand parkettierbar ist$\}$ ist NEXPTIME-vollständig.
3. RECTANGLE-TILING := $\{x\$^n \mid \exists m \in \mathbb{N}$: x ist Code eines Dominosatzes D mit dem das $(n \times m)$-Rechteck mit weißem Rand parkettierbar ist$\}$ ist NPSPACE-vollständig.
4. Bin-RECTANGLE-TILING := $\{x\,\mathrm{bin}(n) \mid \exists m \in \mathbb{N}$: x ist Code eines Dominosatzes D mit dem das $(n \times m)$-Rechteck mit weißem Rand parkettierbar ist$\}$ ist NPSPACE-vollständig.

Hinweis: Bilden Sie Berechnungen einer Halbband-Turuing-Maschine $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ nach:

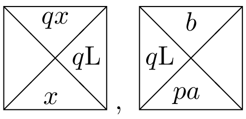
Dominos für die Befehle:

$(p, a, q, b, N) \in \delta$: 

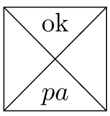
,

$(p, a, q, b, R) \in \delta$: 

für alle $x \in \Gamma$.

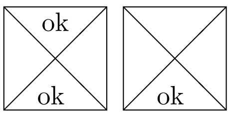
$(p, a, q, b, L) \in \delta$: 

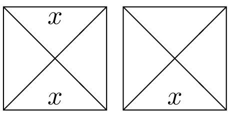
für alle $x \in \Gamma$.



falls kein Befehl mit pa existiert und $p \in F$.

Dominos für das Auffüllen**:**



und


für alle $x \in \Gamma$.