Strukturelle Komplexitätstheorie

Dr. Gengler

Aufgabenblatt 6

Bearbeitung bis zum 26.05.2014

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen zeitkonstruierbar sind.

$$n \cdot \log n \ , \ n^k \ (f\ddot{u}r \ \ k \in \mathbb{N} \, , \, k \geq 1) \ , \ 2^n \, , n^n$$

Versuchen Sie auf einer $0DT^1$, $2DT^1$oder einer $2DT^2$zu konstruieren.

Aufgabe 2
Sei $k \in \mathbb{N}$, f eine (auf $2DT^{k+1}$) zeitkonstruierbare totale Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ mit $f \geq \mathrm{id}$ und g eine totale Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ mit $g \in \mathcal{O}(f)$. Zeigen Sie:

$$2DT^k \langle g \rangle_{\text{weak}} \subset 2DT^{k+1} \langle f \rangle_{\text{strong}}$$

Aufgabe 3 (Translationslemma für Platz)
Sei $f, g > \log$ und $h > \mathrm{id}$ mit h auf $(\log \circ h)$-band-berechenbar. Zeigen Sie, dass dann gilt (X,Y$\in$ {D,N}):

$$\text{XSPACE}(f) \subseteq \text{YSPACE}(g) \implies \text{XSPACE}(f \circ h) \subseteq \text{YSPACE}(g \circ h)$$

Hinweis: Zu einer Sprache L definieren wir die Sprache $L_{\#} = \{w\#^i \mid w \in L, i = h(n) - n, |w| = n\}$. Wo liegt $L_{\#}$, wenn L in XSPACE($f \circ h$) liegt? Und umgekehrt?

Aufgabe 4 (Translationslemma für Zeit)
Sei $f, g > (1+\varepsilon)\cdot\mathrm{id}$ für ein $\varepsilon > 0$ und $h > \mathrm{id}$ mit h zeit-konstruiebar. Zeigen Sie, dass dann gilt (X,Y$\in$ {D,N}):

$$\text{XTIME}(f) \subseteq \text{YTIME}(g) \implies \text{XTIME}(f \circ h) \subseteq \text{YTIME}(g \circ h)$$

Aufgabe 5
Zeigen Sie

1. P $\subset$ EXPTIME
2. PSPACE $\subset$ EXPSPACE

Aufgabe 6
Zeigen Sie:

1. CFL $\subset$ 1NT$\langle$id$\rangle$
2. CFL $\subset$ 2DT$^*\langle$poly$\rangle$ =: P

Hinweis: Recherchieren Sie: Greibach-Normalform, CYK-Algorithmus.

Aufgabe 7
Zeichen Sie ein Venn-Diagramm mit den folgenden Sprachklasssen: CFL, P, NP, co-NP, REC und RE. Tragen Sie die Sprachen $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und H in dieses Venndiagramm ein.

Aufgabe 8
Zeigen Sie, dass die Klassen P und NP unter Vereinigung, Schnittbildung, Konkatenation und inverserm Homomorphismus abgeschlossen sind.

Aufgabe 9
Wir betrachten die folgenden Sprachen L_1 und L_2 ($\mathrm{bin}(n)$ bezeichnet die Binärdarstellung von n, niederwertigste Bits hinten, ohne führende Nullen):

$$L_1 := \{a^n ca^m ca^k \mid n, m, k \in \mathbb{N} \wedge k = n \cdot m\}$$
$$L_2 := \{\mathrm{bin}(n)c\,\mathrm{bin}(m)c\,\mathrm{bin}(k) \mid n, m, k \in \mathbb{N} \wedge k = n \cdot m\}$$

Zu L_1 und L_2 betrachten wir die im Folgenden kurz beschriebenen Turing-Maschinen M_1 und M_2, welche L_1 und L_2 entscheiden: im Wesentlichen subtrahieren die Turing-Maschinen n m-mal vom Startwert k; wird dadurch genau 0 erreicht, so wird akzeptiert ansonsten verworfern. (Natürlich müssen M_1 und M_2 auch prüfen, dass die Eingabe die korrekte Form hat.)

1. Wird durch die Turing-Maschinen M_1 und M_2 bezeugt, dass L_1 und L_2 in P liegen?
2. Liegen L_1 und L_2 in P?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 10
Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0,1\}^*$)

1. $(A \leq_m^{\text{poly}} B) \implies (A \leq_m B)$
2. $(A \leq_m^{\text{poly}} B \wedge B \in \mathrm{P}) \implies A \in \mathrm{P}$
3. $(A \leq_m^{\text{poly}} B \wedge A \notin \mathrm{NP}) \implies B \notin \mathrm{NP}$.
4. ($A \in \mathrm{P}$ entscheidbar, $B \neq \emptyset$, $B \neq \{0,1\}^*$, dann ist $A \leq_m^{\text{poly}} B$.
5. (A NP-vollständig $\wedge\, A \in \mathrm{P}$) $\implies$ $(\mathrm{P} = \mathrm{NP})$.
6. $(A \leq_m^{\text{poly}} B \wedge B \in \mathrm{NP}) \implies A \in \mathrm{NP}$.
7. $(A \leq_m^{\text{poly}} B \wedge A \notin \mathrm{P}) \implies B \notin \mathrm{P}$.
8. $A \leq_m^{\text{poly}} B \iff \overline{A} \leq_m^{\text{poly}} \overline{B}$.
9. Sind A und B NP-vollständig, so gilt $A \equiv_m^{\text{poly}} B$.
10. $(\mathrm{NPC} \cap \mathrm{P} \neq \emptyset) \implies (\mathrm{NP} = \mathrm{P})$.
11. $(\mathrm{P} = \mathrm{NP}) \implies (\mathrm{NPC} = \mathrm{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\})$.

Aufgabe 11
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0,1\}^*$):

1. co-P = P .
2. $A \leq_m^{\text{poly}} B \implies B \leq_m^{\text{poly}} A$.
3. $(L \in \mathrm{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\} \wedge L' \in \mathrm{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\}) \implies L \equiv_m^{\text{poly}} L'$.

Aufgabe 12
Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0,1\}^*$, vollständig jeweils bezüglich $\leq_m^{\text{poly}}$)

1. (A NP-vollständig und $A \leq_m^{\text{poly}} B$ und $B \in \mathrm{NP}$) $\implies$ B NP-vollständig.
2. Keine nichtentscheidbare Sprache ist NP-vollständig.
3. Jede nicht-triviale Sprache in P ist P-vollständig.

Aufgabe 13
Zeigen Sie:

1. $A \leq_m^{\text{poly}} B \iff \overline{A} \leq_m^{\text{poly}} \overline{B}$.
2. $(A \in \mathrm{NPC} \wedge \mathrm{NP} \neq \text{co-NP}) \implies (\{1\} \cdot A \cup \{2\} \cdot \overline{A} \notin \mathrm{NP} \cup \text{co-NP})$.

Aufgabe 14
Welche der Eigenschaften "reflexiv", "symmetrisch", "antisymmetrisch", "transitiv" haben die Relationen $\leq_m^{\text{poly}}$ bzw. $\equiv_m^{\text{poly}}$ auf der Menge aller Sprachen über dem Alphabet $\{0,1\}^*$? Beweisen Sie jeweils Ihre Antwort.