Strukturelle Komplexitätstheorie

Dr. Gengler

Aufgabenblatt 5

Bearbeitung bis zum 12.05.2014

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen bandkonstruierbar sind.

$$\log n \ , \ \sqrt{n} \ , \ \frac{n}{\log n} \ , \ n \cdot \log n \ , \ n^k \ (f\ddot{u}r \ \ k \in \mathbb{N}\,,\ k \geq 1) \ , \ 2^n \ , n^n$$

Aufgabe 2
Geben Sie eine streng monotone, totale Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ an, die nicht bandkonstruierbar ist. Gibt es entsprechende Funktionen auch in $\mathcal{O}(\mathrm{id})$?

Aufgabe 3
Geben Sie eine totale Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ in $\mathcal{O}(\log\log)$ an, die bandkonstruierbar ist.
Hinweis: Was ist mit $\log \circ \mathrm{kN}$?

Aufgabe 4
Sei f eine bandkonstruierbare totale Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$2\mathrm{DT}[f]_{\text{weak}} = 2\mathrm{DT}[f]_{\text{strong}}$$
$$2\mathrm{NT}[f]_{\text{weak}} = 2\mathrm{NT}[f]_{\text{strong}}$$

Aufgabe 5
Sei f eine totale Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ mit $f \geq \log$. Zeigen Sie: Zu jeder stark-g-platzbeschränkten Turing-Maschine M gibt es eine äquivalente stark-g-platzbeschränkte Turing-Maschine M', die immer hält.

Aufgabe 6
Sei f eine bandkonstruierbare totale Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$. mit $f \leq \mathrm{id}$. Sei $L_f := \{a^{n-f(n)}b^{f(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie: $L_f \in 2\mathrm{DT}[f]$.

Aufgabe 7
Zeigen Sie: Es gibt keine monotone, bandkonstruierbare Funktion in $\mathcal{o}(\log) \setminus \mathcal{O}(1)$.

Aufgabe 8
Zeigen Sie, dass keine bandkonstruierbare Fuktion aus $\mathcal{o}(\log)$ eine unbeschränkte minorisiernde Funktion hat.

Aufgabe 9
Zeigen Sie:

1. Für eine Platzschranke $s \geq \log$ gilt: $2\mathrm{NT}[s] \subseteq 2\mathrm{DT}[s^2]$
2. Für eine Platzschranke s gilt: $2\mathrm{DT}[s] \subseteq 2\mathrm{DT}^*\langle \mathrm{id} \cdot 2^{\mathcal{O}(t)} \rangle$
3. Für eine Zeitschranke $t \geq \mathrm{id}$ gilt: $2\mathrm{NT}^*\langle t \rangle \subseteq 2\mathrm{DT}^*\langle 2^{\mathcal{O}(t)} \rangle$
4. Für eine Platzschranke s gilt: $2\mathrm{NT}[s] \subseteq 2\mathrm{DT}^*\langle \mathrm{id} \cdot 2^{\mathcal{O}(s)} \rangle$
5. Folgt für eine Platzschranke $s \geq \log$ die Aussage aus 4. aus denen in 1. und 2. ?

Aufgabe 10
Zeigen Sie mit Hilfe der Beziehungen zwischen platz- und zeitbeschränkten deterministischen und nichtdeterministischen Turing-Maschinen sowie des Platzhierarchie-Satzes, dass es auch folgende Hierarchien geben muss:

1. Platzhierarchie für nichtdeterministische Turing-Maschinen.
2. Zeithierarchie für deterministische Turing-Maschinen.
3. Zeithierarchie für nichtdeterministische Turing-Maschinen.

Aufgabe 11
Geben Sie Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 und f_8 von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ an so dass:

$$2\mathrm{DT}[f_1] \subset 2\mathrm{DT}[f_2] \begin{array}{ccccc} \subset & 2\mathrm{DT}[f_3] & \subset & 2\mathrm{DT}[f_5] & \subset \\ \subset & 2\mathrm{DT}[f_4] & \subset & 2\mathrm{DT}[f_6] & \subset \end{array} 2\mathrm{DT}[f_7] \subset 2\mathrm{DT}[f_8]$$

und

$$2\mathrm{DT}[f_5] \setminus 2\mathrm{DT}[f_4] \neq \emptyset \quad \text{und}\, 2\mathrm{DT}[f_6] \setminus 2\mathrm{DT}\ f_3] \neq \emptyset$$

Zeichnen Sie das zugehörigen Mengendiagramm (Venn-Diagramm).

Aufgabe 12
Sei f eine bandkonstruierbare totale Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ mit $f > \mathrm{id}$ und g eine totale Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ mit $g \in \boldsymbol{o}(f)$. Zeigen Sie:

$$2\mathrm{DT}[g]_{\mathrm{weak}} \subset 1\mathrm{DT}[f]_{\mathrm{strong}}$$

Aufgabe 13
Wir nennen eine Funktion f von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ schwach bandkonstruierbar, wenn es eine stark-f-bandbeschränkte immer haltende 2DT-Maschine M (mit Eingabealphabet Σ) gibt mit der folgenden Eigenschaft.

> Bei einer Eingabe der Länge n stoppt M immer mit einer Binärzahl als Ausgabe, deren Wert kleiner gleich $f(n)$ ist, und für jedes $n \in N$ gibt es mindestens ein Eingabewort w der Länge n, bei der das Ausgabewort den Wert $f(n)$ hat. Also:
> $\big(\forall w \in \Sigma^n \ \ \exists j \in N : M(w) \downarrow \mathrm{bin}(j) \wedge j \leq f(n)\big) \wedge \big(\forall n \in N \ \ \exists w \in \Sigma^n : M(w) \downarrow \mathrm{bin}(f(n))\big)$

Sei $g, f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g \in \boldsymbol{o}(f)$ und f schwach bandkonstruierbar und $f \geq \log$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$2\mathrm{DT}[g]_{\mathrm{weak}} \subset 2\mathrm{DT}[f]_{\mathrm{strong}}$$

Aufgabe 14
Sei f eine schwach bandkonstruierbare totale Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ mit $f \geq \mathrm{id}$. Zeigen Sie:

$$2\mathrm{DT}[f]_{\mathrm{weak}} = 2\mathrm{DT}[f]_{\mathrm{strong}}$$

Aufgabe 15
Sei $k \in \mathbb{N}$, f eine (auf $2\mathrm{DT}^{k+1}$) zeitkonstruierbare totale Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ mit $f \geq \mathrm{id}$ und g eine totale Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ mit $g \in \boldsymbol{o}(f)$. Zeigen Sie:

$$2\mathrm{DT}^k[g]_{\mathrm{weak}} \subset 2\mathrm{DT}^{k+1}[f]_{\mathrm{strong}}$$

Aufgabe 16
Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Savitch die folgende Hierarchieaussage:

> Seien f und g totale Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ mit $g \geq \log$ und $g^2 \in \boldsymbol{o}(f)$ und f platzkonstruierbar. Dann gilt:
> $$2\mathrm{NT}[g]_{\mathrm{weak}} \subset 2\mathrm{NT}[f]_{\mathrm{strong}}$$

Aufgabe 17
Sei M eine $\boldsymbol{o}(\log)$-Platz-beschränkte Turing-Maschine, die eine Blocksprache $L \subseteq a_1^* \cdots a_k^*$ erkennt. Sei $w = a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}$ ein von M erkanntes Wort, und sei der j-te Block der längste in w (also $j \in \{1, \ldots, k\}$ und für $i = 1, \ldots, k$ gilt $n_j \geq n_i$).
Zeigen Sie, dass dann auch die Wörter $w_l := a_1^{n_1} \cdots a_j^{n_j + l \cdot (n_j)!} \cdots a_k^{n_k}$ von M erkannt werden.
Bermerkung: Der längste Block kann somit gepumpt werden. Dies gilt übrigens für alle Blöcke, die linear lang sind. (Wieso?)
Hinweis: Teilläufe, die den Block nur von einer Grenze aus berühren, werden durch das Pumpen nicht gestört. Bei Teilläufen von einer Grenze zur anderen, muss sich an zwei Inputpositionen eine Arbeitskonfiguration wiederholen; hierbei betrachten wir nur die im Teillauf zuletzt an dieser Inputposition angenommenen Arbeitskonfiguration.

Aufgabe 18
Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht mit $\boldsymbol{o}(\log)$ Platz erkannt werden:

$$\begin{array}{lcl} L_= & := & \{a^n b^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_3 & := & \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_{\mathrm{sq}} & := & \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \end{array}$$

Hinweis: Benutzen Sie vorhergehende Aufgabe.