Strukturelle Komplexitätstheorie

Dr. Gengler

Aufgabenblatt 4

Bearbeitung bis zum 05.05.2014

Aufgabe 1
Geben Sie eine deterministische 2-Band-Turing-Maschine M an, die höchstens 5 Befehle besitzt und sich wie folgt verhält:
Wird M mit 1^n auf dem ersten Band und leerem zweiten Band gestartet, so stoppt M, mit 1^{n^2} auf dem zweiten Band. Kommentieren Sie Ihre Programm!

Aufgabe 2
Sei Σ ein endliches Alphabet. Zu $w \in \Sigma^*$ bezeichne $Z(w)$ die Menge der in w vorkommenden Zeichen aus Σ. Sei \$ ein weiteres Zeichen, das nicht in Σ vorkommt. Wir betrachten die Sprache $L_1 := \{\$u\$a\$ \mid u \in \Sigma^* \wedge a \in Z(u)\}$. Zeigen Sie:

1. L_1 wird von einem 1NFA mit weniger als $2 \cdot |\Sigma| + 10$ Zuständen erkannt.
2. L_1 wird von einem 2DFA mit weniger als $2 \cdot |\Sigma| + 10$ Zuständen erkannt.
3. L_1 wird von einem 1DFA mit $2 \cdot 2^{|\Sigma|} + 3$ Zuständen erkannt.
4. Jeder 1DFA, der L_1 erkennt, hat mindestens $2 \cdot 2^{|\Sigma|} + 3$ Zustände.

Wir betrachten weiterhin die Sprache $L_2 := \{\$u\$v\$ \mid u, v \in \Sigma^* \wedge Z(u) = Z(u)\}$. Zeigen Sie:

5. L_2 wird von einem 2DFA mit weniger als $10 \cdot |\Sigma| + 10$ Zuständen erkannt.
6. Jeder 1NFA – und damit erst recht jeder 1DFA – der L_2 erkennt, hat mindestens $2^{|\Sigma|}$ Zustände.

Aufgabe 3 ($\mathcal{O}(1)$ Platz ist regulär)
Zeigen Sie, dass one-/two-way deterministische/nichtdeterministische Turingmaschinen, die $\mathcal{O}(1)$-platzbeschränkt sind, nur reguläre Sprachen erkennen. Die Aussage gilt sowohl für starke wie auch schwache Komplexität.
Hinweis: Ein nichtdeterministischer finiter Automat kann die Folge der Crossing Sequences raten und verifizieren.

Definition: $\Omega(f) := \{g \mid \exists c \in \mathbb{N}\ \exists^\infty n \in \mathbb{N} : g(n) \geq \frac{1}{c} \cdot f(n)\}$

Aufgabe 4 (untere Schranken bei Turingmaschinen)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Hat eine one-way deterministischen Turingmaschine M einen unbeschränkten Platzaufwand s, so muß der Platzaufwand s von M in $\Omega(\log)$ liegen.
   Hinweis: Bei minimalen Wörten mit Arbeitsaufwand m darf sich an den einzelnen Inputpositionen keine Arbeitskonfiguration wiederholen. (Wieso?)
2. Hat eine two-way deterministischen Turingmaschine M einen unbeschränkten Platzaufwand s, so muß der Platzaufwand s von M in $\Omega(\log\log)$ liegen.
   Hinweis: Bei minimalen Wörten mit Arbeitsaufwand m darf sich an den einzelnen Inputpositionen keine Crossing Sequence wiederholen. (Wieso?)
3. Hat eine one-way nichtdeterministischen Turingmaschine M einen unbeschränkten starken Platzaufwand s, so muß der schwache Platzaufwand s von M in $\Omega(\log)$ liegen.
   Hinweis: Bei minimalen Wörten mit Arbeitsaufwand m darf sich an den einzelnen Inputpositionen keine Arbeitskonfiguration wiederholen. (Wieso?)

4. Hat eine two-way nichtdeterministischen Turingmaschine M einen unbeschränkten starken Platzaufwand s, so muß der schwache Platzaufwand s von M in $\Omega(\log\log)$ liegen.
   Hinweis: Bei minimalen Wörten mit Arbeitsaufwand m darf sich an den einzelnen Inputpositionen keine Crossing Sequence wiederholen. (Wieso?)
5. Hat eine one-way (oder two-way) nichtdeterministischen Turingmaschine M einen unbeschränkten schwachen Platzaufwand s, so muß der schwache Platzaufwand s von M in $\Omega(\log\log)$ liegen.
   Hinweis: Bei minimalen Wörten mit Arbeitsaufwand m darf sich an den einzelnen Inputpositionen keine Transitionstabelle wiederholen. (Wieso?)

Aufgabe 5 (untere Schranken scharf)

Zeigen Sie, dass die Schranken aus der vorhergehenden Aufgabe scharf sind, d.h. dass es jeweils nichtreguläre Sprachen gibt, die vom entsprechenden Maschinentyp mit dem Aufwand erkannt werden und somit die Schranke nicht weiter gedrückt werden kann. Zeigen Sie auch die Nichtregularität Ihrer Zeugensprachen.

Aufgabe 6

Wie verhält sich die folgende 2-Band-Turingmaschine (0DT^2) M auf dem Input a^i?

$M = (\{1,2,3\}, \{a\}, \{a\}, \delta, 1, \{3\})$ wobei

$\delta = \{(1,\Box,\Box,2,\Box,\Box,-1,0),\ (1,a,\Box,1,a,a,+1,-1),\ (2,\Box,\Box,3,\Box,\Box,+1,+1),$
$(2,a,\Box,2,a,a,-1,-1),\ (3,a,a,1,\Box,\Box,+1,0)\ \}$.

Hinweis: $n^2 = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)$.