Strukturelle Komplexitätstheorie

Dr. Gengler

Aufgabenblatt 3

Bearbeitung bis zum 28.04.2014

Aufgabe 1
Sei $L := \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1. Geben Sie eine $1\mathrm{DP}^2$-TM an, die die Sprache L erkennt.
2. Geben Sie eine $1\mathrm{DC}^2$-TM an, die die Sprache L erkennt.

Aufgabe 2

1. Geben Sie eine $1\mathrm{DC}^2$-TM an, die die Sprache $\{wc\overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ erkennt.
2. Geben Sie eine $1\mathrm{DC}^2$-TM an, die die Sprache $\{wcw \mid w \in \{a,b\}^*\}$ erkennt.

Aufgabe 3
Wir betrachten eine 0DT-Maschine M, die die Sprache $L(M)$ in Zeit t erkennt (also einen Input der Länge n mit $t(n)$ Schritten erkennt). Seien M' die $1\mathrm{DP}^2$-Maschine, die wir erhalten, wenn wir die Maschine M nach dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren simulieren, und M'' die entsprechende $1\mathrm{DC}^4$-Maschine. Welche Zeitschranken werden von den simuliernden Maschinen M' und M'' eingehalten? Welche Bandschranken werden von den simuliernden Maschinen M' und M'' eingehalten? Platzschranke angegeben, in $\langle\cdot\rangle$ die Zeitschranke.

Aufgabe 4
$\mathrm{bin}(i)$ bezeichne die Binärdarstellung (niederwertigstes Bit hinten, ohne führende Nullen) der Zahl i ($i \in \mathbb{N}$). Sei

$$L_{\mathrm{Bin}} := \{\mathrm{bin}(1)\#\,\mathrm{bin}(2)\#\cdots\#\,\mathrm{bin}(k) \mid i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\ \}.$$

1. Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.
2. Geben Sie einen $1\mathrm{NP}^2_1$-Automaten an, der L erkennt.

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass es zu jeder deterministischen Turing-Maschine M einen $1\mathrm{NP}^2_1$-Automaten M' gibt, der die gleiche Sprache erkennt.
Hinweis: Betrachten Sie die Folge der (Beschreibungen von) Konfigurationen in einem akzeptierenden Lauf von M. Der $1\mathrm{NP}^2_1$-Automaten M' kann sich diese Folge raten und durch das ,,versetzte Lesen" überprüfen, ob es sich jeweils um Folgekonfigurationen handelt.

Aufgabe 6

$$\begin{aligned} \text{Sei } L \ &:= \ \{w_1\#w_2\#w_3\cdots\#w_k\# \mid k\in\mathbb{N} \text{ gerade}, w_1\in\{a,b\}^+, \forall i\in\{1,\ldots,k-1\} : w_i = \overleftarrow{w_{i+1}}\} \\ &= \ \{(w\#\overleftarrow{w}\#)^n \mid n\in\mathbb{N}, w\in\{a,b\}^+\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

1. L ist nicht kontextfrei,
2. L ist Schnitt zweier kontextfreier Sprachen L_1 und L_2,
3. $L \in 1\mathrm{DP}^2$,
4. Das Komplement von L ist eine kontextfreie Sprache.
   Hinweis: Geben Sie einen erkennenden NPDA an.

Aufgabe 7
Wir betrachten eine 0DT-Turingmaschine M mit Eingabealphabet Σ. Eine Konfiguration K von M, in der M im Zustand q ist, links vom Arbeitkopf die Inschrift u, rechts davon w und unterm Kopf a steht, notieren wir mit $uqaw$. Zu M definieren wir:

$$L_M := \{K_o\#\overleftarrow{K_o}\#K_2\#\overleftarrow{K_2}\#K_3\#\overleftarrow{K_3}\cdots\#K_l\#\overleftarrow{K_l} \mid K_0,\ldots,K_l \text{ akzeptierender Lauf von } M \text{ zu einem } v\in\Sigma^*\}$$

Zeigen Sie:

1. L_M ist nicht kontextfrei,
2. L_M ist Schnitt zweier kontextfreier Sprachen L_1 und L_2,
3. $L_M \in 1\mathrm{DP}^2$,
4. Das Komplement von L_M ist eine kontextfreie Sprache.

Aufgabe 8
Zeigen Sie, dass es nicht entscheidbar ist, ob der Schnitt zweier kontexfreier Sprachen leer ist sowie ob eine Kontexfreie Sprach gleich Σ^*ist, wobei Σ adas zugehörige Terminalzeichenalpjhabet ist.
Hinweis: Denken sie an die vorrige Aufgabe und beeachten Sie: $L(M)=\emptyset \iff L_M=\emptyset$.

Aufgabe 9
Sei $L := \{a^n b^m \mid n,m\in\mathbb{N}\wedge n\neq m\}$.

1. Recherchieren Sie die Aussage und den Beweis des Chinesischen Restsatzes.
2. Recherchieren Sie die Aussagen des Primzahlsatzes.
3. Beweisen Sie mit Hilfe dieser Sätze:

$$\exists c\in\mathbb{N}\,\forall n,m\in\mathbb{N} : (n\neq m \implies \exists i\in\mathbb{N} : i < c\cdot\log n \;\wedge\; n \bmod i \neq m \bmod i)$$

4. Zeigen Sie: $L \in 1\mathrm{NT}[\log\log]_{\text{schwach}}$
5. Zeigen Sie: $L \in 2\mathrm{DT}[\log\log]_{\text{schwach}}$

Aufgabe 10
Wir definieren: $\mathrm{kN}(n) := \min\{t\in N \mid t>1\ ,\ t \text{ teilt } n \text{ nicht}\}$ und $L := \{a^n b^{\mathrm{kN}(n)} \mid n\in\mathbb{N}\}$. Zeigen Sie:

1. $\mathrm{kN}\in\boldsymbol{\mathcal{O}}(\log)$
2. $\mathrm{kN}\in\Omega(\log)$
3. $L\notin\mathrm{REG}$
4. $L\in 2\mathrm{DT}[\log\log]_{\text{stark}}$

Hinweis: Zu $x\in\mathbb{N}$ betrachte $f(x) := \prod_{\substack{p\leq x\\ \text{Primzahl}}} p^{\lfloor\log_p(x)\rfloor}$. Was ist mit $\mathrm{kN}(f(x))$?