Strukturelle Komplexitätstheorie

Dr. Gengler

Aufgabenblatt 2

Bearbeitung bis zum 28.04.2014

Aufgabe 1
Zeigen Sie: $\mathcal{O}(\log) = \mathcal{O}(\log_{10}) = \mathcal{O}(\ln) = \mathcal{O}(\log(2n)) = \mathcal{O}(\log(n + \log(n)) = \mathcal{O}(\log(n^2))$

Aufgabe 2
Welche $\mathcal{O}$– bzw. o–Beziehungen gibt es zwischen den folgenden Funktionen?

$f_1(n) := n^3$

$$f_2(n) := \begin{cases} n^2 & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ n^4 & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$f_3(n) := \begin{cases} n^5 & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ n^2 \cdot \log(n) & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$f_4(n) := \begin{cases} n^n & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ 2^{n \cdot \log(n)} \cdot \log(n) & \text{, sonst} \end{cases}$$

$f_5(n) := n!$

Beweisen Sie die Eigenschaften.

Aufgabe 3
Bestimmen Sie: $\sum\limits_{i \in N} \frac{i}{2^i}$

Aufgabe 4
Konstruieren Sie nach den in der Vorlesung vorgeschlagenen Verfahren zu folgender 2-Band-Turing-Maschine M jeweils eine 1-Band-Turing-Maschine.

$M = (\{0, 1, 2, 3\}, \{a, b\}, \{a, b\}, \delta, 0, \{3\})$ wobei
$\delta = \{(0, a, \Box, 0, a, a, +1, +1),\ (0, b, \Box, 0, b, b, +1, +1),\ (0, \Box, \Box, 1, \Box, \Box, 0, -1),$
$(1, \Box, a, 1, a, \Box, +1, -1),\ (1, \Box, b, 1, b, \Box, +1, -1),\ (1, \Box, \Box, 2, \Box, \Box, -1, 0),$
$(2, a, \Box, 2, a, \Box, -1, 0),\ (2, b, \Box, 2, b, \Box, -1, 0),\ (2, \Box, \Box, 3, \Box, \Box, +1, 0)\ \}$.

Hinweis: Die TM M berechnet die Funktion $f : \{a, b\}^* \to \{a, b\}^*$ mit $f(w) = w\overleftarrow{w}$.

Aufgabe 5
Sei $L := \{a^n b^m c^l a^n b^m \mid n, m, l \in \mathbb{N} \ \wedge \ n + m = l\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen, indem Sie entsprechende Turing-Maschinen angeben.bzw. die Nichtexixtenz einer entsprechenden Turing-Maschine zeigen.

1. $L \in 1\mathrm{DT}[\mathrm{id}]\, \langle \mathrm{id} \rangle$
2. $L \in 2\mathrm{DT}[\log]\, \langle 10\, \mathrm{id} \cdot \log) \rangle$
3. $L \notin 0\mathrm{DT}\, \langle o(\mathrm{id} \cdot \log) \rangle$

Gelten die Aussagen für starke oder für schwache Komplexität?

Aufgabe 6
Sei $L := \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen, indem Sie entsprechende Turing-Maschinen angeben.bzw. die Nichtexixtenz einer entsprechenden Turing-Maschine zeigen.

1. $L \in 1\mathrm{DT}[\mathrm{id}]\,\langle \mathrm{id} \rangle$
2. $L \in 2\mathrm{DT}[\log]\,\langle \mathrm{id} \cdot \log \rangle$
3. $L \notin 0\mathrm{DT}\,\langle \boldsymbol{o}(\mathrm{id} \cdot \log) \rangle$
   Gelten die Aussagen für starke oder für schwache Komplexität?

Aufgabe 7
Sei $L := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen, indem Sie entsprechende Turing-Maschinen angeben.bzw. die Nichtexixtenz einer entsprechenden Turing-Maschine zeigen.

1. $L \in 1\mathrm{DT}[\mathrm{id}]\,\langle \mathrm{id} \rangle$
2. $L \in 2\mathrm{DT}[\log]\,\langle 10\,\mathrm{id} \cdot \log) \rangle$
3. $L \notin 0\mathrm{DT}\,\langle \boldsymbol{o}(\mathrm{id} \cdot \log) \rangle$
   Gelten die Aussagen für starke oder für schwache Komplexität?

Aufgabe 8
Sei $L := \{w_1\# \cdots \# w_k \$ w \mid k \in \mathbb{N},\ \forall i \in \{1, \dots k\} : (w_i \in \{0,1\}^* \wedge w = w_i)\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen, indem Sie entsprechende Turing-Maschinen angeben.

1. $L \in 1\mathrm{DP}_1^2\,\langle 3\,\mathrm{id} \rangle$
2. $L \in 1\mathrm{DT}^1\,\langle 3\,\mathrm{id} \rangle$
3. $L \in 1\mathrm{DT}^1\,\left\langle \frac{4}{3}\,\mathrm{id} \right\rangle$

Aufgabe 9
$\mathrm{bin}(i)$ bezeichne die Binärdarstellung (niederwertigstes Bit hinten, ohne führende Nullen) der Zahl i ($i \in \mathbb{N}$). Sei

$$L_{\mathrm{Bin}} := \{\mathrm{bin}(1)\#\,\mathrm{bin}(2)\# \cdots \#\,\mathrm{bin}(k) \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\ \}.$$

1. Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.
2. Geben Sie eine deterministische $0\mathrm{DT}^1$-Maschine an, die L erkennt.
3. Geben Sie eine deterministische $1\mathrm{DT}^1$-Maschine an, die L mit $\log\log$ (starkem) Platzverbrauch erkennt.

(Bitte nur das Programmverhalten skizieren.)

Aufgabe 10
Sei $L := \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \,\mathrm{mit}\, n \neq m\}$. Zeigen Sie, dass es schwach $\log\log$ beschränkte 1NT und 2DT Maschinen gibt, die L erkennen.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst:

$$n \neq m \implies \exists (l \in \mathbb{N} : l \leq 8 \log(n+m) \ \wedge\ n \bmod l \neq m \bmod l)$$

Notation. In $[\cdot]$ wird die Platzschranke angegeben, in $\langle \cdot \rangle$ die Zeitschranke.