

Strukturelle Komplexitätstheorie

Dr. Gengler

Aufgabenblatt 12

Bearbeitung bis zum 07.07.2014

Definition [exponentielle Hierarchie]

Mit ETIME bzw. EXPTIME bezeichnen wir die Klasse der Sprachen, die von deterministischen Turing-Maschinen mit Zeit 2^{LIN} bzw. 2^{POLY} erkannt werden. NETIME und NEXPTIME sind die entsprechenden Klassen bei nichtdeterministischen Turing-Maschinen.

Wir definieren die (strenge) exponentielle Hierarchie durch $\Sigma_1^{\text{SEH}} := \text{NETIME}$ und $\Sigma_{i+1}^{\text{SEH}} := \text{NP}^{\Sigma_i^{\text{SEH}}}$ für $i \geq 1$, sowie $\Delta_1^{\text{SEH}} := \text{ETIME}$ und $\Delta_{i+1}^{\text{SEH}} := \text{P}^{\Sigma_i^{\text{SEH}}}$ für $i \geq 1$. Schließlich sei $\text{SEH} := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i^{\text{SEH}}$.

Aufgabe 1

Bestimmen sie die ersten vier Klassen in der strengen exponentiellen Hierarchie.

Aufgabe 2

Zeigen Sie:

1. $\text{P}^{\text{NETIME}} = \text{P}^{\text{NEXPTIME}}$
2. $\text{NP}^{\text{NETIME}} = \text{P}^{\text{NEXPTIME}}$

Hinweis: Benutzen Sie Padding-Techniken.

Aufgabe 3

Sei $A \in \text{NETIME}$ und $c_A(n) := |\{w \in A \mid |w| \leq n\}|$. Zeigen Sie:

$$\{a^n \text{bin}(c_A(n)) \mid n \in \mathbb{N}\} \in \text{P}^{\text{NETIME}}$$

Hinweis: Benutzen Sie das Orakel $B = \{a^n \text{bin}(m) \mid n, m \in \mathbb{N} \wedge m \leq c_A(n)\}$. Zeigen Sie, dass mit A auch B in NETIME liegt. Mit Hilfe des Orakels B berechnet durch binäres Suchen die P-Maschine $c_A(n)$ bitweise.

Aufgabe 4

Zeigen Sie: $\text{NP}^{\text{NETIME}} = \text{P}^{\text{NETIME}}$.

Hinweis: Sei L eine Sprache in $\text{NP}^{\text{NETIME}}$, erkannt durch die poly-Zeit-nichtdeterministischen Turing-Maschine M mit Orakel $A \in \text{NETIME}$. Wir skizzieren eine poly-Zeit-nichtdeterministischen Turing-Maschine N sowie ein Orakel $B \in \text{NEXPTIME}$, so dass $L(M^A) = L(N^B) = L$.

Zu einem Inputwort x können wir den Berechnungsbaum $T_M(x)$ betrachten (Wurzel bewertet mit der Startkonfiguration, die Söhne jeweils mit den Nachfolgekonfigurationen). Für $i \in \mathbb{N}$ sei $a_i(x)$ die Anzahl der positiv beantworteten Orakelfragen vom M bei Eingabe x , die im Baum $T_M(x)$ auf der i -ten Ebene (gezählt ab der Wurzel) liegen. N berechnet nacheinander die a_i , wobei für jedes i eine binäre Suche durchgeführt wird. Dabei wird als Orakel B eine geeignete Obermenge der folgenden Sprache genommen:

$$\{x \# \text{bin } c_0 \# \text{bin } c_1 \# \dots \# \text{bin } c_i \mid [\forall j \in \{0, \dots, i-1\} : c_j = a_j(x)] \implies c_i \leq a_i(x)\}$$

Die Sprache B wird erkannt durch eine nichtdeterministische Turingmaschine, die eine Breitensuche auf $T_M(x)$ macht. Ebenenweise wird geraten, welche Orakelfragen positiv beantwortet werden; diese werden verifiziert und gezählt. Stimmt die Anzahl mit $a_i(x)$ überein, so müssen die anderen Antworten negativ sein.

Wieso reicht die Zeit? Wieso wird eine Obermenge benutzt? Bis zu welcher Ebene müssen die $a_i(x)$ berechnet werden? Und wie stellt N^B fest, ob das Wort von M^A akzeptiert wird?

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die strenge exponentielle Hierarchie auf P^{NETIME} kollabiert, d.h. dass:

$$\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} : \Sigma_i^{\text{SEH}} = P^{\text{NETIME}} = \Delta_2^{\text{SEH}}$$

Hinweis: Benutzen Sie die vorhergehende Aufgabe.

Aufgabe 6 (Translationslemma für Platz)

Sei $f, g > \log$ und $h > \text{id}$ mit h auf $(\log \circ h)$ -band-berechenbar. Zeigen Sie, dass dann gilt ($X, Y \in \{D, N\}$):

$$XSPACE(f) \subseteq YSPACE(f) \implies XSPACE(f \circ h) \subseteq YSPACE(f \circ h)$$

Hinweis: Zu einer Sprache L definieren wir die Sprache $L_{\#} = \{w\#^i \mid w \in L, i = h(n) - n, |w| = n\}$. Wo liegt $L_{\#}$, wenn L in $XSPACE(f \circ h)$ liegt? Und umgekehrt?

Aufgabe 7

Sei $L = \{\text{bin}(i)\#\text{bin}(j)\#u \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge u \in \{0, 1\}^* \wedge u \text{ Teilwort von } \text{bin}(i \cdot j)\}$. Zeigen Sie, dass L von einer Mehrband-Turingmaschine mit Zeitaufwand n^2 erkannt wird. Kann L auch mit weniger Zeitaufwand erkannt werden? Kann der Karatsuba-Algorithmus auf einer Mehrband-Turing-Maschine implementiert werden?

Siehe <http://de.wikipedia.org/wiki/Karatsuba-Algorithmus>.