

Strukturelle Komplexitätstheorie

Dr. Gengler

Aufgabenblatt 10

Bearbeitung bis zum 30.06.2014

Aufgabe 1

Zeigen Sie:

1. $P^{NP} = P^{SAT}$
2. $NP^{NP} = NP^{\overline{SAT}}$
3. $P^P = P$
4. $NP^P = NP$
5. $NP^{NP} = NP^{co-NP}$
6. $P^{P^{NP}} = P^{NP}$

Aufgabe 2

Sei \mathcal{L} eine Komplexitätsklasse und L eine \mathcal{L} -vollständige Sprache bezüglich \leq_T . Zeigen Sie, dass dann $P^{\mathcal{L}} = P^L$ und $NP^{\mathcal{L}} = NP^L$ gilt.

Aufgabe 3

Zeigen Sie für $k \in \mathbb{N}$:

1. $P^{\Delta_k^P} = \Delta_k^P$
2. $P^{P^{\Delta_k^P}} = \Delta_k^P$
3. $\Sigma_k^P \cup \Pi_k^P \subseteq \Delta_{k+1}^P$
4. $\Delta_{k+1}^P \subseteq \Sigma_{k+1}^P \cap \Pi_{k+1}^P$

Aufgabe 4

Zeigen Sie für $k \in \mathbb{N}$:

$$((\Sigma_k^P \subseteq \Pi_k^P) \vee (\Pi_k^P \subseteq \Sigma_k^P)) \implies (\Sigma_k^P = \Pi_k^P)$$

Aufgabe 5

Zeigen Sie:

Gilt für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dass $\Sigma_k^P = \Pi_k^P$, so gilt für alle $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dass $\Sigma_{k+l}^P = \Pi_{k+l}^P = \Delta_{k+l}^P = \Sigma_k^P$.

Aufgabe 6

Zu einer Sprache L definieren wir $L^{\otimes} := \{\langle x_1, \dots, x_r \rangle \mid r \in \mathbb{N} \text{ und } x_1, \dots, x_r \in L\}$. Zeigen Sie.

1. Mit $L \in NP$ gilt auch $L^{\otimes} \in NP$
2. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt: $L \in \Delta_k^P \iff L^{\otimes} \in \Delta_k^P$
3. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt: $L \in \Sigma_k^P \iff L^{\otimes} \in \Sigma_k^P$
4. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt: $L \in \Pi_k^P \iff L^{\otimes} \in \Pi_k^P$

Aufgabe 7

Zeigen Sie für $k \in \mathbb{N}$:

1. $\exists^P P = NP$
2. $\forall^P P = co-NP$
3. $\exists^P \Sigma_k^P = \Sigma_k^P$
4. $\forall^P \Sigma_k^P = \Pi_{k+1}^P$
5. $\exists^P \Pi_k^P = \Sigma_{k+1}^P$
6. $\forall^P \Pi_k^P = \Pi_k^P$

Aufgabe 8

Wir definieren $\text{PH} := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Sigma_k^{\text{P}}$. Zeigen Sie für $k \in \mathbb{N}$:

1. $\text{PH} \subseteq \text{PSPACE}$
2. $(\text{PH} = \text{PSPACE}) \implies (\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \Sigma_k^{\text{P}} = \Sigma_{k+1}^{\text{P}})$

Hinweis: In PSPACE gibt es vollständige Probleme, z.B. die Sprache QBF.