Strukturelle Komplexitätstheorie

Dr. Gengler

Aufgabenblatt 1

Bearbeitung bis zum 15.04.2014

Aufgabe 1
Schlagen Sie die Regel von (de) L'Hôpital nach.

Aufgabe 2
Ordnen Sie folgende Funktionen nach ihren Wachstumseigenschaften:

$\log n$, $\sqrt{\log n}$, $\sqrt{n}$, $(\log\sqrt{n})^2$, $\frac{n}{\log n}$, n^2 , n^k (für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$) , $n^{\log n}$, $n^{\log\log n}$, $\log(n^2)$, $(\log n)^2$, n^n , $\log\log\log n$, $\sum_{i=0}^{n} i$, $\sum_{i=0}^{n} i^2$, $2^{n\log n}$, $(\sqrt{\log n})^{\log\log n}$.

Beweisen Sie jeweils die entsprechenden $\mathcal{O}$– bzw. $\mathcal{o}$–Beziehungen.

Aufgabe 3
Sei $\mathcal{F}_{\text{tot}}$ die Menge der totalen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen ($f, g \in \mathcal{F}_{\text{tot}}$):

1. $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(h) \implies f \in \mathcal{O}(h)$
2. $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in o(h) \implies f \in o(h)$
3. $f \in o(g)$ und $g \in \mathcal{O}(h) \implies f \in o(h)$
4. Die Relation $R_{\mathcal{O}} := \{(f,g) \in \mathcal{F}_{\text{tot}} \times \mathcal{F}_{\text{tot}} \mid f \in \mathcal{O}(g) \}$ ist eine Äquivalenzrelation.auf der Menge $\mathcal{F}_{\text{tot}}$ der totalen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.
5. Die Relation $R_{o} := \{(f,g) \in \mathcal{F}_{\text{tot}} \times \mathcal{F}_{\text{tot}} \mid f \in o(g) \}$ ist eine Äquivalenzrelation.auf der Menge $\mathcal{F}_{\text{tot}}$ der totalen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.
6. Die Relation $R_{\Omega} := \{(f,g) \in \mathcal{F}_{\text{tot}} \times \mathcal{F}_{\text{tot}} \mid f \in \Omega(g) \}$ ist eine Äquivalenzrelation.auf der Menge $\mathcal{F}_{\text{tot}}$ der totalen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.

Aufgabe 4
Beweisen oder widerlegen die folgenden Aussagen.

1. $f \in \mathcal{O}(g) \setminus o(g) \implies g \in \mathcal{O}(f)$
2. Es gibt Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit: $f \notin \mathcal{O}(g)$ und $g \notin \mathcal{O}(f)$
3. $f \in \mathcal{O}(g) \setminus o(g) \implies f \in \Omega(g)$
4. $f \in o(g)$ und $g \in \mathcal{O}(f) \implies f \in \Omega(g)$

Aufgabe 5
Wir definieren:

$$\mathrm{kN}(n) := \min\{t \in N \mid t > 1 \text{ , } t \text{ teilt } n \text{ nicht}\}$$
$$\mathrm{gkN}(n) := \max\{\mathrm{kN}(\nu) \mid \nu \in \{1, \dots n\} \}$$

1. Erstellen Sie per Rechner eine möglichst grosse Tabelle mit den Spalten n, $\log(n)$, $\mathrm{kN}(n)$, $\mathrm{gkN}(n)$.
2. Tragen Sie die Werte in ein Diagramm ein.
3. In welcher Größenordnung liegen die Funktionen $\mathrm{kN}(n)$, $\mathrm{gkN}(n)$?

Bemerkung: Beweise zum Wachstum der Funktionen kommen später in der Vorlesung.