Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgaben zum Knobeln unter dem Weihnachtsbaum

Dieses Blatt geht nicht in die Bewertung des Moduls ein. Wer jedoch einige Lösungen abgibt, bekommt eine erfolgreiche Bearbeitung gutgeschrieben :-)

Die jeweils beiden ersten Übungsteilnehmer des Wintersemesters 2013/14, die eine korrekte vollständige Lösung für eine der folgenden Aufgaben per eMail schicken bzw. in Raum HG 2.16 abgeben, bekommen auf dem Stammtisch ein Freigetränk nach Wahl ausgegeben. Jeder darf für jede Aufgabe eine Lösung abgeben, der Rechtsweg ist ausgeschlossen.

Am Ende des Semesters werden für interessierte Studierende Lösungen zu diesen Aufgaben vorgestellt. Auf dem Stammtisch werden bei Bedarf Lösungsansätze besprochen.

Aufgabe 1 ((p, q)-Urnenspiel)
Gegeben sei eine Urne mit p roten und q schwarzen Kugeln, und eine zweite Urne mit $p+q$ roten Kugeln. Aus der ersten Urne werden zwei Kugeln gezogen. Haben beide Kugeln die gleiche Farbe, so werden beide weggelegt, und es wird aus der zweiten Urne eine rote gezogen und diese in die erste Urne gelegt. Haben beide Kugeln unterschiedliche Farbe, so wird die schwarze Kugel in die erste Urne zurückgelegt, und die rote Kugel wird weggelegt. Dieser Schritt wird solange wiederholt, bis in der ersten Urne nur mehr eine Kugel übrig ist. Ein (p, q)-Urnenspiel heisst *erfolgreich*, wenn es eine mögliche Schrittfolge gibt, nach der die letzte Kugel schwarz ist.

Zeigen Sie: Die Sprache $\{a^p b^q \mid \text{das } (p, q)\text{-Urnenspiel ist erfolgreich}\}$ ist regulär.

Aufgabe 2
Wir betrachten ein $(n \times n)$-Schachbrett und dazu $\frac{n^2}{2} - 1$ Steine, die jeweils genau 2 Felder überdecken können. Dazu betrachten wir die Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ aller Zahlen n, für die das $(n \times n)$-Schachbrett mit den $\frac{n^2}{2} - 1$ Steinen so belegbar ist, dass das linke obere und das rechte untere Eckfeld unbedeckt bleiben.

Zeigen Sie, dass $\{a^n \mid n \in A\}$ eine reguläre Sprache ist.

Aufgabe 3
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein 2-elementiges Alphabet und $c \notin \Sigma$ ein weiteres Zeichen. Für $x \in \Sigma$ und $w \in \Sigma^*$ bezeichne $\#_x(w)$ die Anzahl der Vorkommen des Zeichens x im Wort w. Die Sprachen L_1 und L_2 sind definiert durch:

$$L_1 = \{wv \mid w, v \in \Sigma^* \ \wedge \ \#_a(w) = \#_b(v)\}$$
$$L_2 = \{wcv \mid w, v \in \Sigma^* \ \wedge \ \#_a(w) = \#_b(v)\}$$

Zeigen Sie:

1. Die Sprachen L_1 und L_2 sind kontextfrei.
2. Genau eine der Sprachen L_1 und L_2 ist regulär.

Aufgabe 4
Zu $L \subseteq \Sigma^*$ definieren wir:

$\mathrm{EH}(L)$	$:=$	$\{w \mid \exists v \in \Sigma^* \text{ mit } wv \in L \text{ und } \lvert v\rvert = \lvert w\rvert\}$	"erste Hälfte"
$\mathrm{ZH}(L)$	$:=$	$\{w \mid \exists v \in \Sigma^* \text{ mit } vw \in L \text{ und } \lvert v\rvert = \lvert w\rvert\}$	"zweite Hälfte"
$\mathrm{MD}(L)$	$:=$	$\{w \mid \exists v, u \in \Sigma^* \text{ mit } vwu \in L \text{ und } \lvert v\rvert = \lvert u\rvert = \lvert w\rvert\}$	"mittleres Drittel"
$\mathrm{EDD}(L)$	$:=$	$\{uw \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^* : \lvert u\rvert = \lvert v\rvert = \lvert w\rvert, uvw \in L\}$	"erstes und letztes Drittel"

1. Geben Sie EH(L), ZH(L), MD(L) und EDD(L) für folgende Sprachen L_i an ($i = 1, 2, 3$) :

$$L_1 := \{ab, aababb, \epsilon\}, \quad L_2 := \{a^n b^n | \ n \in N\}, \quad L_3 := \{w \in \{0,1\}^* \mid |w| \text{ ist durch 4 teilbar}\}.$$

2. Sei $M = (\{1,2,3,5,6,7,8\}, \{a,b,c\}, \delta, \{1\}, \{6,8\})$ ein nichtdeterministischer endlicher Automaten, mit δ gegeben durch:

δ	1	2	3	5	6	7	8
a	$\{2\}$	$\{5\}$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
b	$\{3\}$	$\emptyset$	$\{7\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
c	$\emptyset$	$\{6\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{7,8\}$	$\{8\}$

Geben Sie endlche Automaten an, die EH($L(M)$), ZH($L(M)$) und MD($L(M)$) erkennen.

3. Zeigen Sie: Wird L von einem endlichen Automat erkannt so auch EH(L), ZH(L) und MD(L).
4. Zeigen Sie: Es gibt durch DFA erkennbare Sprachen L_1 und L_2, so das EDD(L_1) auch durch einen DFA erkennbar ist, und EDD(L_2) von keinem DFA erkennbar ist.

Aufgabe 5 (k-Vektorspiel)

Wir betrachten $\mathbb{N}^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ fest. Gegeben ist ein Startpunkt $S \in \mathbb{N}^k$ und eine geordnete Liste $(v_1, \ldots, v_n)$ von n Vektoren aus $\mathbb{Z}^k$ ($n \in \mathbb{N}$ beliebig).

Ein Vektor v heißt *anwendbar* auf einen Punkt P, falls $P + v \in \mathbb{N}^k$ (alle Komponenten bleiben größer gleich 0). Wir starten mit unserem Startpunkt S, addieren den ersten anwendbaren Vektor v_i auf S und erhalten so den Punkt P_1, und fahren entsprechend mit P_1 fort, addieren wiederum den ersten anwendbaren Vektor auf, erhalten den Punkt P_2, usw. bis bei einem Punkt P_j kein anwendbarer Vektor mehr existiert. Genauer:

`Start` $P := S$;
`While` es existiert ein anwendbarer Vektor in der Liste $(v_1, \ldots, v_n)$ `DO`
$v :=$ erster anwendbarer Vektor der Liste; $P := P + v$`0;` `OD`

Wir bezeichnen dies als das k**-Vektorspiel** $(S, v_1, \ldots, v_n)$.

Ist bei Eingabe von $S \in \mathbb{N}^k$ und der geordneten Liste $(v_1, \ldots, v_n)$ entscheidbar, ob das zugehörige Programm stoppt, also das k-Vektorspiel $(S, v_1, \ldots, v_n)$ endlich ist? (Natürlich muss die Eingabe geeignet kodiert sein, z. B. ähnlich einer Turingmaschine.)

Zeigen Sie:

1. Für $k = 1$ und $k = 2$ ist das k-Vektorspiel entscheidbar. Diese Teilaufgabe kann man direkt lösen.
2. Für $k = 3$ ist das k-Vektorspiel entscheidbar. Diese Teilaufgabe lässt sich lösen durch eine geschickte Reduktion dieses Problems auf $\{G \mid G \text{ ist CFG und } \lambda \in L(G)\}$
3. Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 3$ ist das k-Vektorspiel nicht entscheidbar (d.h. die Mengen VS_i sind nicht entscheidbar, $i = 4, 5, 6, \ldots$). Diese Teilaufgabe lässt sich lösen durch eine geschickte Reduktion von $H_\lambda = \{i \mid T_i(\lambda) \downarrow\}$ auf diese Probleme.

Bemerkung: Das Rüstzeug für diese Aufgabe bekommen Sie im Laufe der nächsten Vorlesungen.

E schéine Krëschtdag an e glécklecht neit Joer!

Vrolijk Kerstmis en een goed nieuw jaar!

God Jul och gott nytt å r!

Joyeux Noël et une bonne nouvelle année!

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!