

Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 9

Abgabetermin: 13.12.2013

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen, Vornamen, und Ihre Übungsgruppe an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von: – Aufgabe 1,
 – Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
 – Aufgaben 14, 15, 16, 17 und 18

Fragen zu den Aufgaben können auf <http://www.BTU-Forum.DE> in Unterforum “Theoretische Informatik, ...” gestellt werden.

Aufgabe 1

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Die Klasse CFL der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen unter Vereinigung, Konkatenation, Iteration, Homomorphismus, inversem Homomorphismus und Schnitt mit regulären Mengen.
Hinweis: Benutzen Sie bei „Schnitt mit regulären Mengen“ die Produktautomatenkonstruktion für einen erkennenden Keller-Automaten und einen endlichen Automaten, bei „Homomorphismus“ erzeugende kontextfreie Grammatiken und bei „inversem Homomorphismus“ erkennende Keller-Automaten.
2. Die Klasse CFL der kontextfreien Sprachen ist nicht abgeschlossen unter Komplementbildung und Schnitt.

Aufgabe 4

Sei $L := \{w_1\#w_2\#w_3\cdots\#w_k\# \mid k \in \mathbb{N} \text{ gerade}, w_i \in \{a, b\}^+, \forall i \in \{1, \dots, k-1\} : w_i = \overleftarrow{w_{i+1}}\}$
 $= \{(w\#\overleftarrow{w}\#)^n \mid n \in \mathbb{N}, w \in \{a, b\}^+\}.$

Zeigen Sie:

1. L ist nicht kontextfrei,
2. L ist Schnitt zweier kontextfreier Sprachen L_1 und L_2 ,
3. Das Komplement von L ist eine kontextfreie Sprache.

Hinweis: Geben Sie einen erkennenden NPDA an.

Aufgabe 5

Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$\text{REG} \subset \text{CFL} \subset \text{CSL}$$

Denken Sie daran, Zeugensprachen für die Echtheit der Inklusion anzugeben!

Aufgabe 6

Welche der folgenden Sprachen sind kontextfrei? Beweisen sie Ihre Aussagen!

- $L_1 = \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, w = v\}$
- $L_2 = \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, |w| = |v|\}$
- $L_3 = \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, w \neq v\}$
- $L_4 = \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, w \neq v, |w| = |v|\}$
- $L_5 = \{a, b\}^* \setminus \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- $L_6 = \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, w = \overleftarrow{v}\}$
- $L_7 = \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, |w| = |\overleftarrow{v}|\}$
- $L_8 = \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, w \neq \overleftarrow{v}\}$
- $L_9 = \{wvu \mid w, v, u \in \{a, b\}^*, w = v = u\}$
- $L_{10} = \{wcvcu \mid w, v, u \in \{a, b\}^*, w = v = u\}$
- $L_{11} = \{wvu \mid w, v, u \in \{a, b\}^*, w = \overleftarrow{v} = u\}$

Aufgabe 7

Wir betrachten die Dyck-Sprachen $D_1 := L(G_1)$ und $D_2 := L(G_2)$, wo

$$G_1 = (\{S\}, \{(,)\}, \{S \rightarrow SS, S \rightarrow \lambda, S \rightarrow (S)\}, S)$$

$$G_2 = (\{S\}, \{(,), [,]\}, \{S \rightarrow SS, S \rightarrow \lambda, S \rightarrow (S), S \rightarrow [S]\}, S)$$

1. Beschreiben Sie D_1 und D_2 umgangssprachlich.
 Siehe auch: http://en.wikipedia.org/wiki/Dyck_language (englische Version!).
2. Geben Sie erkennende Kellerautomaten für D_1 und D_2 an.
3. Geben Sie Homomorphismen g, h und eine reguläre Sprache R an, so dass $D_1 = h^{-1}(D_2 \cap R)$.
4. Geben Sie Homomorphismen g und h sowie eine reguläre Sprache R an, so dass $\{wc\overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\} = h^{-1}(D_2 \cap R)$ ist.

Aufgabe 8

Zu $L \subseteq \Sigma^*$ definieren wir

$$\text{ANF}(L) := \{w \mid \exists v \in \Sigma^* \text{ mit } wv \in L\},$$

$$\text{END}(L) := \{w \mid \exists v \in \Sigma^* \text{ mit } wv \in L\},$$

$$\text{SUB}(L) := \{w \mid \exists v, u \in \Sigma^* \text{ mit } wvu \in L\}.$$

1. Geben Sie $\text{ANF}(L)$, $\text{END}(L)$ und $\text{SUB}(L)$ für folgende Sprachen L_i an ($i = 1, 2, 3$):

$$L_1 := \{ab, aababb, \lambda\}, \quad L_2 := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad L_3 := \{w\overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}.$$

2. Sei $M = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \{a, b, c\}, \delta, \{1\}, \{5, 6\})$ ein nichtdeterministischer finiter Automaten, mit δ gegeben durch:

δ	1	2	3	4	5	6	7	8
a	{2}	{5}	\emptyset	\emptyset	{2}	\emptyset	\emptyset	\emptyset
b	\emptyset	\emptyset	{4}	{5}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
c	\emptyset	{6}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	{7}	{7, 8}	{8}

Geben Sie nichtdeterministische Automaten an, die $\text{ANF}(L(M))$, $\text{END}(L(M))$ und $\text{SUB}(L(M))$ erkennen.

3. Zeigen Sie: Wird L von einem finiten Automat erkannt, so auch $\text{ANF}(L)$, $\text{END}(L)$ und $\text{SUB}(L)$.
4. Zeigen Sie: Wird L von einer kontextfreien Grammatik erzeugt, so auch $\text{ANF}(L)$, $\text{END}(L)$ und $\text{SUB}(L)$.

Aufgabe 9

$$\begin{aligned} \text{Sei } L_1 &:= \{a, d\}^* \cdot \{b, d\}^* \cdot \{c, d\}^* \\ L_2 &:= \{w \in L_1 \mid \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\} \\ L_3 &:= \{xyz \in L_1 \mid x, z \in \{a, b, c, d\}^* \wedge y \in \{ab, bc\}\} \\ L_4 &:= L_2 \cup L_3 \end{aligned}$$

Welche der Sprachen L_1, \dots, L_4 besitzen die kontextfreie Pumping-Eigenschaft? Welche der Sprachen L_1, \dots, L_4 sind kontextfrei?

Hinweis: Welche Rolle spielen die Zeichen d in den Sprachen L_1, \dots, L_4 ?

Aufgabe 10

Sei $L := \{a^n b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0 \wedge n \neq m\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

1. L hat nicht die reguläre Pumping-Eigenschaft.
2. L hat die kontextfreie Pumping-Eigenschaft.

Hinweis: L ist nicht kontextfrei. Dies kann mit Hilfe von Ogden's Lemma nachgewiesen werden, gute Studierende können den Beweis versuchen. Die Anwendung von Ogden's Lemma ist nicht wesentlich schwieriger als die Anwendung des Pumping Lemmas. (Zu Ogden's Lemma siehe http://en.wikipedia.org/wiki/Ogden%27s_lemma, bzw. William Ogden: A Helpful Result for Proving Inherent Ambiguity, *Mathematical Systems Theory*, 2(3), pp. 191-194, 1968.)

Aufgabe 11

Sei $L_1 := \{a^n b^m c^k \mid n, m, k \in \mathbb{N}_0 \wedge (n = m)\}$, $L_2 := \{a^n b^m c^k \mid n, m, k \in \mathbb{N}_0 \wedge (m = k)\}$ und $L_3 := \{a^n b^m c^k \mid n, m, k \in \mathbb{N}_0 \wedge (n \neq m \vee m \neq k)\}$. Zeigen Sie:

1. L_1, L_2, L_3 und $L_1 \cup L_2$ sind kontextfrei.
2. $L_1 \cap L_2$ ist nicht kontextfrei (Hinweis: Zeigen Sie, dass $L_1 \cap L_2$ nicht kontextfrei pumpbar ist.)
3. $\overline{L_1 \cap L_2} = (\{a, b, c\}^* \setminus L(a^* b^* c^*)) \cup L_3$.
4. $\overline{L_1 \cap L_2}$ ist kontextfrei.
5. Die kontextfreien Sprachen sind nicht abgeschlossen unter Schnitt und Komplementbildung.

Aufgabe 12

Sei Σ ein Alphabet, L eine kontextfreie Sprache über Σ , R eine reguläre Sprache über Σ und h ein Homomorphismus von Σ^* nach Σ^* . Zeigen Sie:

1. $L \cap R$ ist kontextfrei,
2. $h(L)$ ist kontextfrei,
3. $h^{-1}(L)$ ist kontextfrei.

Aufgabe 13 (für gute Studierende)

Wir betrachten eine Sprache L mit folgenden Eigenschaften: L hat die kontextfreie Pumping-Eigenschaft, es gibt ein Verfahren, das die Konstante in der Pumping Eigenschaft bestimmt und es gibt ein Verfahren, das das Wortproblem ($w \in L?$) entscheidet [Diesen Voraussetzungen sind zum Beispiel bei den durch kontextfreie Grammatiken beschriebenen Sprachen gegeben. (Übung: Wieso?)]. Skizzieren Sie Verfahren (unter Benutzung der vorgegebenen Verfahren), die das Leerheits-Problem ($L = \emptyset?$) und das Endlichkeits-Problem ($|L| \neq \infty?$) für L entscheiden.

Aufgabe 14

Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeichnen Sie das Venn-Diagramm mit folgenden Sprachmengen:

$P(\Sigma^*)$	alle Sprachen über Σ
REG	reguläre Sprachen über Σ
CFL	kontextfreie Sprachen über Σ
A_3	Sprachen über Σ mit regulärer Pumping Eigenschaft
A_2	Sprachen über Σ mit kontextfreier Pumping Eigenschaft

Tragen Sie überall eine Sprache ein, die im jeweiligen Bereich liegt, begründen Sie Ihre Eintragungen.

Bemerkung: Sie dürfen alle Sprachen aus dem Übungsblatt verwenden.

Aufgabe 15

Sei $L := \{w \in \{a, b\}^* \mid bb \text{ ist Teilwort von } w, \text{ oder } \#_a(w) \text{ ist Primzahl, oder } \#_b(w) = 0\}$. Zeigen Sie, dass L die kontextfreie Pumping-eigenschaft hat, aber nicht kontextfrei ist.

Aufgabe 16

Sei Σ ein endliches Alphabet. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen..

1. Jede Sprache, die die kontextfreie Pumping-Eigenschaft hat ist kontextfrei.
2. Ist $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei und h ein Worthomomorphismus von Σ^* nach Σ^* , so sind $h(L)$ und $h^{-1}(L)$ auch kontextfrei.
3. $\exists L \in \text{CFL} : \bar{L} \in \text{CFL}$
4. $\exists L \in \text{CFL} : \bar{L} \notin \text{CFL}$
5. $\forall L \in \text{CFL} : \bar{L} \notin \text{CFL}$
6. Es gibt eine kontextfreie Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenz R_L einen unendlichen Index hat.
7. Es gibt eine kontextfreie Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenz R_L einen endlichen Index hat.
8. Es gibt eine kontextfreie, nicht-reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenz R_L einen endlichen Index hat.
9. Ist eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei und nicht-regulär, so ist sie unendlich.
10. Ist $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei und $L' \subseteq \Sigma^*$ nicht-regulär, so ist auch $L \cup L'$ nicht-regulär.
11. Sind $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei und $L' \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei, so ist auch $L \cup L'$ kontextfrei.

Aufgabe 17

Skizzieren Sie ein Verfahren, das bei Eingabe (der Beschreibung) einer kontextfreien Grammatik G entscheidet, ob $L(G)$ leer beziehungsweise endlich beziehungsweise unendlich ist, d. h. das "0" ausgibt, falls $L(G) = \emptyset$, "E" ausgibt, falls $0 < |L(G)| < \infty$ und "U" ausgibt, falls $|L(G)| = \infty$.

Aufgabe 18

Sei Σ ein Alphabet mit $|\Sigma| \geq 2$. Wir definieren den Operator \mathcal{D} , der einer Sprache L die Sprache $\mathcal{D}(L)$ zuordnet vermöge:

$$\mathcal{D}(L) := \{w \cdot w \mid w \in L\}$$

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussage.

1. Ist L kontextfrei, so ist auch $\mathcal{D}(L)$ kontextfrei.
2. Ist L regulär, so ist $\mathcal{D}(L)$ kontextfrei.
3. Ist $L = \bar{L}$ und L regulär, so ist $\mathcal{D}(L)$ kontextfrei.