Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 8

Abgabetermin: 06.12.2013

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen, Vornamen, und Ihre Übungsgruppe an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 15, 16, 17 und 18

Fragen zu den Aufgaben können auf `http://www.BTU-Forum.DE` in Unterforum "Theoretische Informatik, ..." gestellt werden.

Aufgabe 1

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

Sei $L := \{w \in \{a,b\}^* \mid abab \text{ ist nicht Teilwort von } w\}$.

1. Geben Sie einen deterministischen finiten Automaten M für L an.
2. Konstruieren Sie zu M eine rechtslineare Grammatik G, die L erzeugt.
3. Konstruieren Sie zu M eine linkslineare Grammatik G', die L erzeugt.
4. Geben Sie für das Wort $abaabbabbabb$ einen Ableitungsbaum bzgl. G und einen Ableitungsbaum bzgl. G' an.

Aufgabe 4

Sei $G = (\{S, A, B, C, D, E, F\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit:

$$P = \{S \to aA \mid bB \mid aS \mid bS\ ,\ A \to aA \mid bA \mid cC\ ,\ B \to aB \mid bB \mid cD\ ,$$
$$C \to cC \mid aF\ ,\ D \to cD \mid bF\ ,\ E \to aE \mid bE \mid \varepsilon\ ,\ F \to E\}$$

1. Konstruieren Sie einen finiten Automaten M zur Sprache $L(G)$.
2. Geben Sie für alle Klassen der Relation $R_{L(G)}$ jeweils einen die Klasse beschreibenden regulären Ausdruck an.
3. Geben Sie einen regulären Ausdruck α an, der $L(G)$ beschreibt.
4. Konstruieren Sie eine linkslineare Grammatik G' mit $L(G) = L(G')$.

Aufgabe 5

Konstruieren Sie zur kontextfreien Grammatik $G := (\{X\}, \{a, b\}, P, X)$ Pushdown-Automaten nach dem in der Vorlesung beschriebenen Verfahren, mit $P :\ X \to XX \mid aXb \mid bXa \mid ab \mid ba$.
Sei $w := baabba$. Geben Sie alle Ableitungsbäume für w bezüglich der Grammatik G an. Geben Sie für den konstruierten Pushdown-Automaten jeweils Läufe auf dem Wort w an, die den verschiedenen Ableitungsbäumen entsprechenden. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 6
Zu einer kontextfreien Grammatik $G = (N, T, P, S)$ definieren wir:

N_{erz}	$:=$	$\{X \in N \mid \exists w \in T^* \ (X \xrightarrow{*} w)\}$	erzeugende Nonterminals
N_{err}	$:=$	$\{X \in N \mid \exists \alpha, \beta \in (T \cup N)^* \ (S \xrightarrow{*} \alpha X \beta)\}$	erreichbare Nonterminals
N_{ntz}	$:=$	$\{X \in N \mid \exists \alpha, \beta \in (T \cup N)^* \ \exists w \in T^* \ (S \xrightarrow{*} \alpha X \beta \xrightarrow{*} w\}$	nützliche Nonterminals

Geben Sie ein Verfahren an, das zu einer Grammatik $G = (N, T, P, S)$ die Mengen N_{erz}, N_{err} und N_{ntz} bestimmt.

1. Gilt im Allgemeinen $N_{\text{ntz}} = N_{\text{erz}} \cap N_{\text{err}}$?
2. Geben Sie ein Verfahren an, das entscheidet, ob $L(G) = \emptyset$ ist.
3. Gibt es zu jeder kontextfreien Grammatik G eine äquivalente Grammatik G', die nur nützliche Nonterminals besitzt?
4. Geben Sie ein Verfahren an das zu einer Grammatik G mit $L(G) \neq \emptyset$ eine äquivalente Grammatik G' erzeugt, die nur nützliche Nonterminals besitzt.
5. Wenden Sie Ihr Verfahren auf die Grammatik $G := (\{A, B, C, D, E\} \ , \ \{a, b\} \ , \ P \ , \ A)$ an, wo $P := \{A \to AC, A \to B, B \to bb, C \to CD, C \to a, C \to Ca, E \to aE, E \to aa\}$

Aufgabe 7
Wir definieren die Wortfolge $(w_i \mid i \in \mathbb{N})$ induktiv vermöge $w_0 := \lambda$ und $w_{i+1} := w_i \cdot b \cdot a^i$ für $i \in \mathbb{N}$. Weiter sei $L := \{w_i \mid i \in N_0\}$. Beweisen Sie:

1. $\{|w| \mid w \in L\} = \{\frac{n(n+1)}{2} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.
2. $\forall w \in L \quad \forall p \in \mathbb{N}_o \quad \exists n \in \mathbb{N}_0 \quad : \quad (\, n > |w| \quad \wedge \quad L \cap \{v \in \{a, b\}^* \mid n \leq |v| \leq n + p\} = \emptyset \,)$.
3. L hat die kontextfreie Pumping-Eigenschaft nicht.

Aufgabe 8
Beweisen Sie, dass die folgenden Sprachen L_i die kontextfreie Pumping-Eigenschaft nicht haben:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \{a^n b^{2n} c^{3n} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \\
L_2 &= \{a^n b^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \\
L_3 &= \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\} \\
L_4 &= \{a^m \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 : n = m^2\} \\
L_5 &= \{a^p \mid p \text{ Primzahl}\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9
Wir betrachten den Pushdown-Automaten

$$P = (\{s\}, \{a, b, c\}, \{A, B, C, \bot, \top\}, \delta, s, \{s\})$$

an, mit:

$$
\begin{aligned}
\delta = \{ \quad & (s, c, \bot, s, A\top), (s, a, A, s, AB), (s, a, A, s, CB), (s, a, C, s, CBB), \\
& (s, c, C, s, \lambda), (s, b, B, s, \lambda), (s, c, \top, s, \lambda) \quad \}
\end{aligned}
$$

[Der Automat startet mit der Kellerinschrift $\bot$.]

1. Geben Sie jeweils einen Lauf von P auf dem Wörtern $w = caaaacbbbbc$ und $v = caaacbbbbbc$ an.
2. Bestimmen Sie die von P erkannte Sprache.
3. Konstruieren Sie zu P eine Grammatik G, die die Sprache $L(P)$ erzeugt. Wenden Sie dabei das in der Vorlesung beschriebene Verfahren an . Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise!
4. Geben Sie für die Wörter w und v jeweils einen Ableitungsbaum bezüglich der konstruierten Grammatik G an.

Aufgabe 10
Angenommen, wir nehmen folgende Änderungen in der Definition der kontextfreien Pumping-Eigenschaft vor:

1. "$(\forall z \in L$ mit $|z| \geq k)$" durch "$(\forall z \in L)$" ersetzen.
2. "$(\forall z \in L$ mit $|z| \geq k)$" durch "$(\forall z \in \Sigma^*$ mit $|z| \geq k)$" ersetzen.
3. Die Bedingung "$vx \neq \lambda$" weglassen.
4. "$(\forall i \in \mathbb{N}_0)$" durch "$(\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$" ersetzen.
5. "$vx \neq \lambda$" durch "$v \neq \lambda \land x \neq \lambda$" ersetzen
6. "$(\forall i \in \mathbb{N}_0) : uv^iwx^iy$" durch "$(\forall i, j \in \mathbb{N}_0) : uv^iwx^jy$" ersetzen.
7. "$(\exists u, v, w, x, y$ mit $\ldots)(\forall i \in \mathbb{N}_0)$" durch "$(\forall i \in \mathbb{N}_0)(\exists u, v, w, x, y$ mit $\ldots)$" ersetzen.

Welche Auswirkungen hätten diese Änderungen? Geben Sie gegebenenfalls Sprachen an, die die geänderte Eigenschaft erfüllen, die ungeänderte Eigenschaft jedoch nicht (oder umgekehrt). Begründen Sie Ihre Aussagen.

Hinweis: Denken Sie bei 5. an $L = \{a^nb^nc^nd^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0\} \cup \{a, b, c\}^*$, und bei 7. an $L = \{b^ja^pb^pc^p \mid j \in \mathbb{N}_0, j \neq 0, p \in \mathbb{N}_0, p \neq 0\}$.

Aufgabe 11
Konstruieren Sie zu folgenden kontextfreien Grammatiken G_1 und G_2 äquivalente Grammatiken, welche keine λ-Regeln (also keine Regeln der Form $A \to \lambda$ mit A Nonterminal) besitzen. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise.

1. $G_1 := (\{A, B, C, D\}\ ,\ \{a, b\}\ ,\ \{C \to \lambda, A \to aD, B \to bb, C \to bCb, D \to CB, D \to aa\}\ ,\ A\ )$,
2. $G_2 := (\{A, B, C, D\}\ ,\ \{a, b\}\ ,\ P\ ,\ A\ )$ mit
   $P = \{A \to aD, B \to C, B \to b, C \to bCb, C \to \lambda, D \to BCB, D \to aa\}$.

Aufgabe 12
Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik ohne λ-Regeln. Wir betrachten die folgenden Verfahren:

(A) Solange es Regeln $A \to B$ und $B \to \alpha$ gibt mit $A, B \in N$ und $\alpha \in (N \cup T)^+ \setminus N$, so dass $A \to \alpha$ noch nicht in der Regelmenge ist, füge die Regel $A \to \alpha$ zur Regelmenge hinzu.

(B) Solange es Regeln $A \to \alpha B \beta$ und $B \to C$ gibt mit $A, B, C \in N$ und $\alpha \in (N \cup T)^*$, so dass $A \to \alpha C \beta$ noch nicht in der Regelmenge ist, füge die Regel $A \to \alpha C \beta$ zur Regelmenge hinzu.

(C) Streiche alle Regeln $A \to B$ mit $A, B \in N$.

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Das Verfahren (A) terminiert.
2. Das Verfahren (B) terminiert.
3. Durch Anwenden von (A) und danach (C) auf die Grammatik G erhält man eine zu G äquivalente Grammatik ohne Regeln der Form $A \to B$ mit $A, B \in N$.
4. Durch Anwenden von (B) und danach (C) auf die Grammatik G erhält man eine zu G äquivalente Grammatik ohne Regeln der Form $A \to B$ mit $A, B \in N$.

Hinweis: Betrachten Sie unter anderem die Grammatik $G = (\{A, B, C, D, E, S\}\ ,\ \{a, b\}, \{S \to A, A \to B, B \to CD, C \to E, D \to F, E \to a, F \to b\}, S)$.

Aufgabe 13

Konstruieren Sie zu folgenden kontextfreien Grammatiken G_1 und G_2 äquivalente Grammatiken, welche keine λ-Regeln (also keine Regeln der Form $A \to \lambda$ mit A Nonterminal) und keine längenerhaltenden Regeln (also keine Regeln der Form $A \to B$ mit A, B Nonterminals) besitzen. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise.

1. $G_1 := (\{A, B, C, D\}\ ,\ \{a, b\}\ ,\ \{D \to \lambda, A \to aDD, B \to bb, C \to bCb, C \to a, D \to C, D \to B, D \to aa\}\ ,\ A)$
2. $G_2 := (\{A, B, C, D, E\}\ ,\ \{a, b\}\ ,\ \{A \to aD, B \to C, B \to b, C \to bCb, C \to B, C \to a, D \to BCB, D \to E, E \to A\}\ ,\ A)$

Aufgabe 14

Konstruieren Sie zur der Grammatik $G_1 = (\{S, A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, B_3, C, C_1, C_2, C_3\}, \{a, b, c\}, P, S)$ eine äquivalente Grammatik in Chomsky-Normalform. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise.

$$
\begin{aligned}
P := \{S \to aA \mid bB \mid cC\ ,\quad & A \to A_1c \mid A_2A_1 \mid a\ ,\ A_1 \to A_2 \mid aa\ ,\ A_2 \to \lambda \mid bb\ ,\\
& B \to B_3\ ,\ B_1 \to B_2 \mid a\ ,\ B_2 \to B_3 \mid b\ ,\ B_3 \to B_1 \mid c\ ,\\
& C \to C_1C_2C_3\ ,\ C_1 \to C_1C_1C_1 \mid a\ ,\ C_2 \to cC_2cC_2 \mid b\ ,\ C_3 \to ccc\ \}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 15
Sei $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} \wedge (i = j \vee j = k)\}$.

1. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G für L an.
2. Konstruieren Sie nach dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren zu G einen Kellerautomaten P, der L erkennt.
3. Geben Sie für Ihre Grammatik G zum Wort $w = a^3b^3c^3$ alle Ableitungsbäume an.
4. Geben Sie zu jedem der Ableitungsbäume die entsprechenden Läufe auf w von P an.

Aufgabe 16
Wir betrachten den Pushdown-Automaten
$$P = (\{s, 0, 1, 2\}, \{a, b\}, \{A, B, \perp\}, \delta, s, \{0, 1, 2\})$$
an, mit:
$$\begin{aligned}\delta = \{ \quad & (s, \lambda, \perp, 0, A\perp), (0, a, A, 0, AA), (0, \lambda, A, 1, B), (1, a, B, 1, BBB), \\ & (1, b, B, 1, \lambda), (1, b, B, 2, \lambda), (2, a, B, 2, \lambda), (2, a, A, 2, \lambda), (2, \lambda, \perp, 2, \lambda) \quad \}\end{aligned}$$
[Der Automat startet mit der Kellerinschrift $\perp$.]

1. Geben Sie einen Lauf von P auf dem Wort $w = aaaabbbbaaa$ an.
2. Bestimmen Sie die von P erkannte Sprache.
3. Konstruieren Sie zu P eine Grammatik G, die die Sprache $L(P)$ erzeugt. Wenden Sie dabei das in der Vorlesung beschriebene Verfahren an. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise!
4. Geben Sie für das Wort $w = aaaabbbbaaa$ einen Ableitungsbaum bezüglich der konstruierten Grammatik G an.

Aufgabe 17
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gibt eine kontextfreie Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft nicht hat.
2. Jede reguläre Sprache hat die kontexfreie Pumping-Eigenschaft.
3. Es gibt eine Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft hat, aber nicht die kontextfreie Pumping-Eigenschaft hat.
4. Jede Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft hat, hat auch die kontexfreie Pumping-Eigenschaft.
5. Jede Sprache, die die kontextfreie Pumping-Eigenschaft hat, hat auch die reguläre Pumping-Eigenschaft.
6. Jede Sprache, die die kontextfreie Pumping-Eigenschaft hat ist regulär.

Aufgabe 18
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet und seien $L, R \subseteq \Sigma^*$ beliebige Sprachen über Σ. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Sie dürfen die in der Vorlesung bewiesenen Sätze verwenden, müssen diese aber zitieren.

1. Keine Teilmenge einer kontextfreien Sprache ist regulär.
2. $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*) \wedge R \in \text{CFL} \implies L \cap R \in \text{CFL}$ (wobei $L, R \subseteq \Sigma^*$).
3. $L \in \text{CFL} \wedge R \in \text{CFL} \implies L \cap R \in \text{REG}$.
4. $L \in \text{CFL} \implies \Sigma^* \setminus L \notin \text{CFL}$.
5. Jede unendliche reguläre Sprache ist disjunkte Vereinigung zweier unendlicher regulärer Sprachen.
6. Es gibt kontextfreie nichtreguläre Sprachen, die disjunkte Vereinigung von zwei unendlichen kontextfreien Sprachen sind.
7. Die Vereinigung einer nicht–regulären Sprache mit einer kontextfreien Sprache ist nicht–regulär.
8. Zu jeder kontextfreien Sprache gibt es unendlich viele kontextfreie Grammatiken, die diese Sprache erzeugen.
9. Es gibt nur abzählbar unendlich viele kontextfreie Sprachen über dem Alphabet $\{a, b\}$.