Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 6

Abgabetermin: 22.11.2013

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen, Vornamen, und Ihre Übungsgruppe an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 13, 14 und 15

Fragen zu den Aufgaben können auf `http://www.BTU-Forum.DE` in Unterforum "Theoretische Informatik, ..." gestellt werden.

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Sei f eine totale monotone Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \exists i \in \mathbb{N} \ : \ f(i+1) > f(i) + k$$

Sei weiterhin $L := \{a^{f(i)} \mid i \in \mathbb{N}\}$.

1. Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass L nicht regulär ist.
2. Bestimmen Sie die Kongruenzklassen von L.
   Hinweis: Siehe auch Aufgabe 18 von Blatt 4.

Aufgabe 4
Beweisen Sie mit Hilfe von endlichen Automaten, dass die regulären Sprachen unter Homomorphismus und inversem Homomorphismus abgeschlossen sind. Verwenden Sie im Beweis weder reguläre Ausdrücke noch Grammatiken.
Hinweis: Sei h ein Homomorphismus. Angenommen, L werde vom deterministischen endlichen Automaten M erkannt. Wir erhalten einen endlichen Automaten für $h(L)$, wenn vom Zustand p mit dem Zeichen a in den Zustand q übergegangen wird, der beim Automaten M von p aus mit $h(a)$ erreicht wird. Umgekehrt erhalten wir einen endlichen Automaten für $h^{-1}(L)$, wenn es von p aus einen Pfad für $h(a)$ nach q gibt, falls von p mit a nach q übergegangen wird.
Definition: $h(L) := \{h(x) \mid x \in L\}$, $h^{-1}(L) := \{x \mid h(x) \in L\}$

Aufgabe 5

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$, sowie h und g Homomorphismen von Σ^* nach Σ^* mit:

$$h(a) = ab \qquad g(a) = a$$
$$h(b) = ba \qquad g(b) = c$$
$$h(c) = ccc \qquad g(c) = \lambda$$

1. Geben Sie $h(L)$, $g(L)$, $h^{-1}(L)$ und $g^{-1}(L)$ für folgende Sprachen L_i an ($i = 1, 2, 3$):

$$L_1 := \{acccaa, ababba, \lambda\}, \quad L_2 := \{a^n b^n \,|\, n \in N\}, \quad L_3 := \{wccc\overleftarrow{w} \,|\, w \in \{a, b\}^*\}.$$

2. Sei $M = (\{1, 2, 5, 6, 7, 8\}, \{a, b, c\}, \delta, \{1\}, \{5, 6\})$ ein nichtdeterministischer endlicher Automaten, mit δ gegeben durch:

δ	1	2	5	6	7	8
a	2, 5	5	–	–	–	7
b	–	2	2	–	–	–
c	–	6	–	7	7, 8	8

Konstruieren Sie NFAs die $h(L(M))$, $g(L(M))$, $h^{-1}(L(M))$ und $g^{-1}(L(M))$ erkennen.

Aufgabe 6

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ L und R reguläre Sprachen über Σ sowie h und g Homomorphismen von Σ^* nach Σ^*. Zeigen Sie, dass dann auch $g\left(h^{-1}(L) \cap R\right)$ regulär ist. [Sie dürfen selbstverständlich die in der Vorlesung gezeigten Sätze benutzen.]

Aufgabe 7

Wir betrachten die Sprachen L_2, L_3 und L_4 sowie die Sprachen: L_2', L_3' und L_4':

$$\begin{array}{lcl}
L_2 & := & \{w \in \{a, b, c\}^* \mid aa, ab, ba \text{ oder } bb \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } w \text{ enthält genau so viele } a\text{'s wie } b\text{'s}\} \\
L_2' & := & \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\
L_3 & = & \{w \in \{a, b\}^* \mid aa \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } bb \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } |w| \text{ ist eine Quadratzahl}\} \\
L_3' & := & \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ ist eine Quadratzahl}\} \\
L_4 & = & L((a + b)^* \cdot (aa + bb) \cdot (a + b)^*) \cup \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ ist Primzahl}\} \\
L_4' & := & \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ ist Primzahl}\}
\end{array}$$

1. Geben Sie Homomorhismen h_2, h_3 und h_4, g_2, g_3 und g_4 sowie reguläre Sprachen R_2, R_3 und R_4 an, so dass $L_i' = g_i\left(h_i^{-1}(L_i) \cap R_i\right)$ gilt für $i = 2, 3, 4$.
2. Zeigen Sie (mit Hilfe der vorhergehenden Aufgabe), dass die Sprachen L_2, L_3 und L_4 nicht regulär sind.
3. (Wiederholung) Zeigen Sie, dass die Sprachen L_2, L_3 und L_4 die reguläre Pumpingeigenschaft haben.

Aufgabe 8

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Geben Sie Grammatiken für folgende Sprachen über Σ an

$$\emptyset,\ \{\lambda\},\ \emptyset^*,\ \{\lambda\}^*,\ \{a, b, c\}^*,\ \{a, b\}^+,\ \{a, b, c\},\ \{abc\},\ \{a, b, c\}^3$$

Aufgabe 9

Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie kontextfreie Grammatiken für folgende Sprachen L_i an:

$$\begin{array}{l}
L_1 := \{a^{2n} c b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\
L_2 := \{w \in \{a, b, c\}^* \mid aba \text{ oder } bab \text{ ist Teilwort } w\} \\
L_3 := \{wv \mid v \in \{c\}^*,\ w \in \{a, b\}^*,\ |w| = |v|\} \\
L_4 := \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\ ,\ i < j\} \\
L_5 := L_1 \cup L_2 \\
L_6 := L_3 \cdot L_4
\end{array}$$

Aufgabe 10
Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie kontextfreie Grammatiken für folgende Sprachen L_i an:

$$
\begin{aligned}
L_1 &:= \{a^{2n}cb^n \mid n \in \mathbb{N}\}\\
L_2 &:= \{w \in \{a,b,c\}^* \mid aba \text{ oder } bab \text{ ist Teilwort } w\}\\
L_3 &:= \{wv \mid w \in \{c\}^*,\ v \in \{a,b\}^*,\ |w| = |v|\}\\
L_4 &:= \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\ ,\ i < j\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 11
Geben Sie jeweils rechtslineare Grammatiken an, die die Sprachen L_i erzeugen:

$$
\begin{aligned}
L_1 &:= \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } abaab \text{ nicht}\}\\
L_2 &:= \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = 3\}\\
L_3 &:= \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 3 = 0 \vee \#_a(w) \bmod 3 = 2\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 12
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gibt eine kontextfreie Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft nicht hat.
2. Jede kontextfreie Sprache hat die reguläre Pumping-Eigenschaft.
3. Es gibt eine kontextfreie Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft hat.
4. Es gibt eine kontextfreie nicht-reguläre Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft hat.

Aufgabe 13
Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie kontextfreie Grammatiken für folgende Sprachen L_i an:

$$
\begin{aligned}
L_1 &:= \{w \in \{a,b,c\}^* \mid \text{Weder } abba \text{ noch } baab \text{ ist Teilwort von } w\}\\
L_2 &:= \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\ ,\ i \neq j\}\\
L_3 &:= \{wcvc\overleftarrow{w} \mid w, v \in \{a,b\}^+\}\\
L_4 &:= \{a^{n+m} b^m c^n \mid n, m \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 14
Geben Sie jeweils rechtslineare Grammatiken an, die die Sprachen L_i erzeugen:

$$
\begin{aligned}
L_1 &:= \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } abaab \text{ nicht}\}\\
L_2 &:= \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \geq 3\}\\
L_3 &:= \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 3 = 1 \vee \#_b(w) \bmod 3 = 2\}\\
L_4 &:= \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 3 = 1 \wedge \#_b(w) \bmod 3 = 2\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 15
Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie: Ist L regulär, so gilt:

$$
\exists k \in \mathbb{N} \quad \forall z \in L \cap \Sigma^{>k} \quad \exists u, v, x, y \in \Sigma^* :\\
(z = u \cdot v \cdot x \cdot y) \ \wedge\ (|vx| < k) \ \wedge\ (v \neq \lambda) \ \wedge\ (x \neq \lambda) \ \wedge\ (u \cdot x \cdot v \cdot y \in L)
$$
