Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 13

Abgabetermin: 24.01.2014

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen, Vornamen, und Ihre Übungsgruppe an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 8, 9, 10 und 11

Fragen zu den Aufgaben können auf `http://www.BTU-Forum.DE` in Unterforum "Theoretische Informatik, ..." gestellt werden.

Aufgabe 1

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

Mit $\mathrm{KOMP}_m^{(n)}(g, h_{1,} \ldots, h_m)$ bezeichnen wir die n-stellige Funktion, die mittels Koposition der m-stelligen Funktion g und den m vielen n-stelligen Funktionen $h_{1,} \ldots, h_m$ entsteht. Mit $\mathrm{PR}^{(n+1)}(g, h)$ bezeichnen wir die $(n+1)$-stellige Funktion, die mittels primitiver Rekursion aus der n-stelligen Funktion g und der $(n+1)$-stellige Funktion h entsteht. Zusammen mit den Bezeichnungen zero_k, s und $p_i^{(n)}$für die Grundfunktionen kann damit durch einen Text (Wort) über ein geeignetes Alphabet Σ beschrieben werden, wie eine primitiv rekursive Funktion durch iterierte Komposition und primitive Rekursion aus den Grundfunktionen entsteht. Dies ist dann der Name für die primitiv rekursive Fuktion, der Name bezeichnet die Funktion (Beachten Sie, dass eine Funktion viele Namen haben kann.) Bei den Worten aus Σ^* können wir entscheiden, ob sie eine primitiv rekursive Funktion beschreiben. Falls keine primitiv rekursive Funktion beschrieben wird, ordnen wir willkürlich die 1-stellige Nullfunktion zu. Die Wörter aus Σ^* können wir aufzählen, und damit können wir auch die (Namen der) primitiv rekursiven Funktionen aufzählen: die i-te primitiv rekursiven Funktion ξ_i ist die Funktion, die durch das i-te Wort w_i aus Σ^* festgelegt wird. Am beschreibenden Text können wir auch die Stelligkeit erkennen (Aufgabe: wieso?). Damit können wir auch die 1-stelligen primitiv rekursiven Funktion ρ_i aufzählen (entspricht ein Text wiederum keiner primitiv rekursiven Funktion oder einer andersstelligen, so ordnen wir wiederum willkürlich die 1-stellige Nullfunktion zu.

1. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(i, n) = \rho_i(n)$ total und berechenbar ist.
2. Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(i) = \rho_i(i) + 1$ total und berechenbar ist, jedoch nicht primitiv ist.
3. Zeigen Sie, dass es totale, berechenbare Funktionen gibt, die nicht primitiv rekursiv sind.

Aufgabe 4
Eine Liste $L = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^*$ von natürlichen Zahlen kann dargestellt werden durch eine natürliche Zahl $\Psi(L) \in \mathbb{N}$ mit

$$\Psi((a_0, \ldots, a_n)) = (p(0))^{a_0+1} \cdot \ldots \cdot (p(n))^{a_n+1} = \prod_{i=0}^{n} (p(i))^{a_i+1}$$

wobei p eine totale injektive monotone Aufzählung der Primzahlen istt ist. Die leere Liste $L_\lambda = ()$ wird somit dargestellt durch 1 (also $\Psi(L_\lambda) = 1$). Ψ ist somit eine Funktion von $\mathbb{N}^*$ nach $\mathbb{N}$.

1. Bestimmen Sie $\Psi((3))$, $\Psi((3,3))$, $\Psi((2,3))$, $\Psi((2,3))$, $\Psi((0,1,2,3))$
2. Ist Ψ eine surjektive Funktion von $\mathbb{N}^*$ nach $\mathbb{N}$?
3. Bestimmen Sie $\Psi(\mathbb{N}^*)$.
4. Geben Sie eine primitiv rekursive Funktion an, die für ein $n \in \mathbb{N}$ angibt, ob $n \in \Psi(\mathbb{N}^*)$.
5. Geben Sie eine primitiv rekursive Funktion $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die die Länge der dargestellten Liste für $n \in \Psi(\mathbb{N}^*)$ angibt, sowie für $n \in \mathbb{N} \setminus \Psi(\mathbb{N}^*)$ den Wert 0 hat.
6. Geben Sie eine primitiv rekursive Funktion $k : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ an, so dass $k(n,i)$ das $i-$te Element der dargestellten Liste für $n \in \Psi(\mathbb{N}^*)$ und $0 \leq i < l(n)$ angibt, und ansonsten den Wert 0 hat.

Hinweis: Denken Sie an Aufgabe 5 von Blatt 12.

Aufgabe 5
Wir betrachten die natürlichen Zahlen als Ziffern. Für ein $b \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ interpretieren wir eine endliche Folge $a = (a_n, \ldots, a_0) \in \mathbb{N}^*$, wobei $a_n \neq 0$ und $a_i < b$ für $i = 1, \ldots, n$, als Ziffernfolge zur Basis b interpretieren, die dann eineindeutig eine Zahl $W(a) \in \mathbb{N}$ repräsentiert (in der üblichen Weise, a_0 die niederwertigste Ziffer). Der Wert 0 wird durch die Ziffernfolge (0) dargestellt.

Für ein $N \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{N}$ bezeichnen length(N, b) die Länge der Zifferndarstellung zur Basis b der durch N dargestellten Zahl und digit(N, i, b) die i-te Ziffer (0-te Ziffer ist niederwertigste) in dieser Darstellung. Beide Funktionen werden willkürlich vervollständigt duch length$(N, 0) =$ length$(N, 1) :=$ 0 sowie digit$(N, i, b) := 0$, falls $b = 0$ oder $b = 1$ oder $i >$ length(N, b).

Zeigen Sie, dass length : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ und digit : $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv sind.

Aufgabe 6
Zu einer n-stelligen Funktion g und den $(n+2)$-stelligen Funktionen h_1 und h_2 definieren wir die $(n+1)$-stelligen Funktion f durch

$$\begin{array}{lcl} f(x_1, \ldots, x_n, 0) & := & g(x_1, \ldots, x_n) \\ f(x_1, \ldots, x_n, y+1) & := & h_1(\ x_1, \ldots, x_n\ ,\ y\ ,\ f(\ x_1, \ldots, x_n, \min(y, h_2(x_1, \ldots, x_n, y))\ )\ ) \end{array}$$

Zeigen Sie, dass mit g, h und h_2 auch wiederum f primitiv rekursiv ist.
Hinweis: Denken Sie an Aufgabe 4.

Aufgabe 7
Zu einer $(n+1)$-stelligen Funktion $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ definieren wir die n-stelligen Funktion $M(f) : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ vermöge

$$M(f)(x_1, \ldots, x_n) := \begin{cases} \text{kleinstes } y \text{, so dass } f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0, & \text{falls ein solches } y \text{ existiert,} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst}. \end{cases}$$

Beachten Sie, dass bei dieser Definition nicht verlangt wird, dass $f(x_1, \ldots, x_n, i)$ für die kleineren i definiert ist.

1. Sei χ'_{H_1} die semi-charakteristische Funktion von $H_1 = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u) \downarrow\}$. Wir definieren $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ durch:
$$h(x, y) = \mathrm{sg}(x \dot{-} y) + \overline{\mathrm{sg}}(\chi'_{H_1}(y))$$
Charakterisieren Sie die Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(x) = \mathrm{sg}(M(h)(x) \dot{-} x)$.
2. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Ist f eine berechenbare Funktion, so ist auch $M(f)$ eine berechenbare Funktion.n.

Zur Erinnerung: $\mathrm{sg}(x) :=$ `if` $x = 0$ `then` 0 `else` 1; sowie $\overline{\mathrm{sg}}(x) := 1 \dot{-} \mathrm{sg}(x)$

Aufgabe 8
Sei f eine primitiv rekursive Funktion von $\mathbb{N}^{k+1}$ nach $\mathbb{N}$ mit $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktionen f_Σ, f_Π , $f_{\max}$ und $f_{\min}$ von $\mathbb{N}^{k+1}$ nach $\mathbb{N}$ primitiv rekursiv sind, wo:

$$\begin{aligned} f_\Sigma(x_1, \ldots, x_k, y) &= \textstyle\sum_{i \leq y} f(x_1, \ldots, x_k, i) \\ f_\Pi(x_1, \ldots, x_k, y) &= \textstyle\prod_{i \leq y} f(x_1, \ldots, x_k, i) \\ f_{\max}(x_1, \ldots, x_k, y) &= \max_{i \leq y} f(x_1, \ldots, x_k, i) \\ f_{\min}(x_1, \ldots, x_k, y) &= \min_{i \leq y} f(x_1, \ldots, x_k, i) \end{aligned}$$

Aufgabe 9
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert vermöge $f(0) = 4711$ und $f(n) = 42 \cdot f(n//2) + 21 \cdot f(n//3)$ für $n > 0$. Zeigen Sie, dass f primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 10
Zeigen Sie, dass es totale Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ gibt, die nicht primitiv rekursiv sind.

Aufgabe 11
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gibt eine streng monoton steigende primitiv rekursive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
2. Es gibt eine streng monoton fallende primitiv rekursive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
3. Ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv, so ist f surjektiv.
4. Ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv, so ist f total.
